

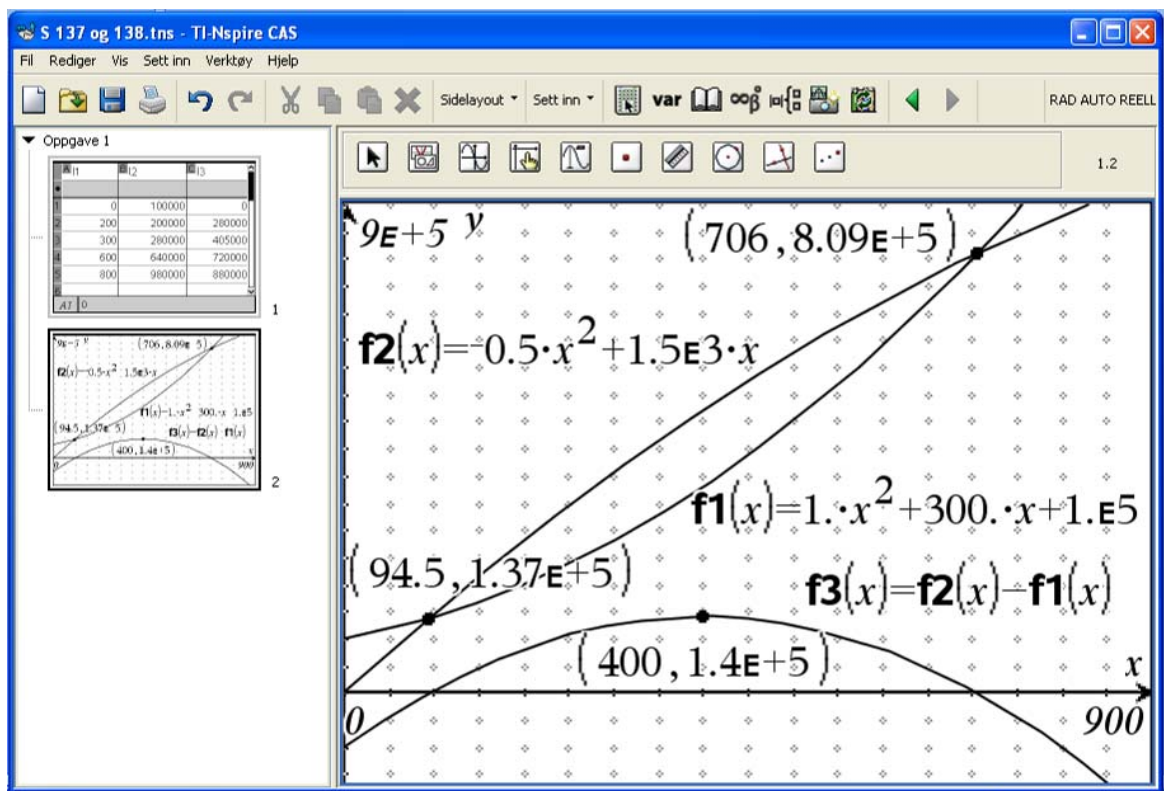
Det digitale verktøyet



TI-Nspire CAS

og

Matematikk S2



Kristen Nastad

Forord

Heftet er skrevet på grunnlag av versjon 1.6.4319 2008 – 12 – 09 av operativsystemet til programmet **TI-*nspire*TM CAS Computer Software for Windows** og **Aschehougs** lærebok **Matematikk S2** på de Studieforberedende utdanningsprogrammene.

Programmet inneholder **applikasjonene** (noen funksjoner i parentes)

- **Kalkulator** (algebra, funksjonsanalyse, sannsynlighet, statistikk og vektor)
- **Grafer & geometri** (graf- og tegneverktøy, geometri og analyseverktøy)
- **Lister & regneark** (regresjon, fordeling, test, konfidensintervall og tabell)
- **Notes** (tekstredigering)
- **Data & statistikk** (plott, diagram, regresjon)

I heftet finner du forklaringer på bruk av programmet TI-*nspire* CAS i eksempler der inntastingen for TEXAS er tatt med i læreboka. I **TI-*nspire* CAS Hjelp** finner du nærmere beskrivelse av applikasjonsverktøyene. Klikk på **Hjelp** på menylinja eller trykk på **F1**-tasten.

I tillegg finner du forklaringer på hvordan du kan bruke programmet i noen andre eksempler.

Side 3 og 4 finner du **innholdsfortegnelsen** med sidehenvisningene til læreboka lengst til venstre.

Du finner en beskrivelse av **startskjermbildet** side 5, **verktøylinjene** sidene 6 – 8, et virtuelt **tastatur** side 8 og **hurtigtaster** side 9.

Sett deg godt inn i informasjonen som fulgte med programmet.

På nettstedet **Atomic Learning** finner du animerte opplæringssekvenser på norsk. Se også **Digitale verktøy** i **Lenkesamling** på **Lokus**.

Den norske sida til **Texas Instruments**:

http://education.ti.com/educationportal/sites/NORGE/productCategory/no_nspire.html

gir mye informasjon om kalkulatoren.

Lykke til med bruken av heftet!

Kristen Nastad

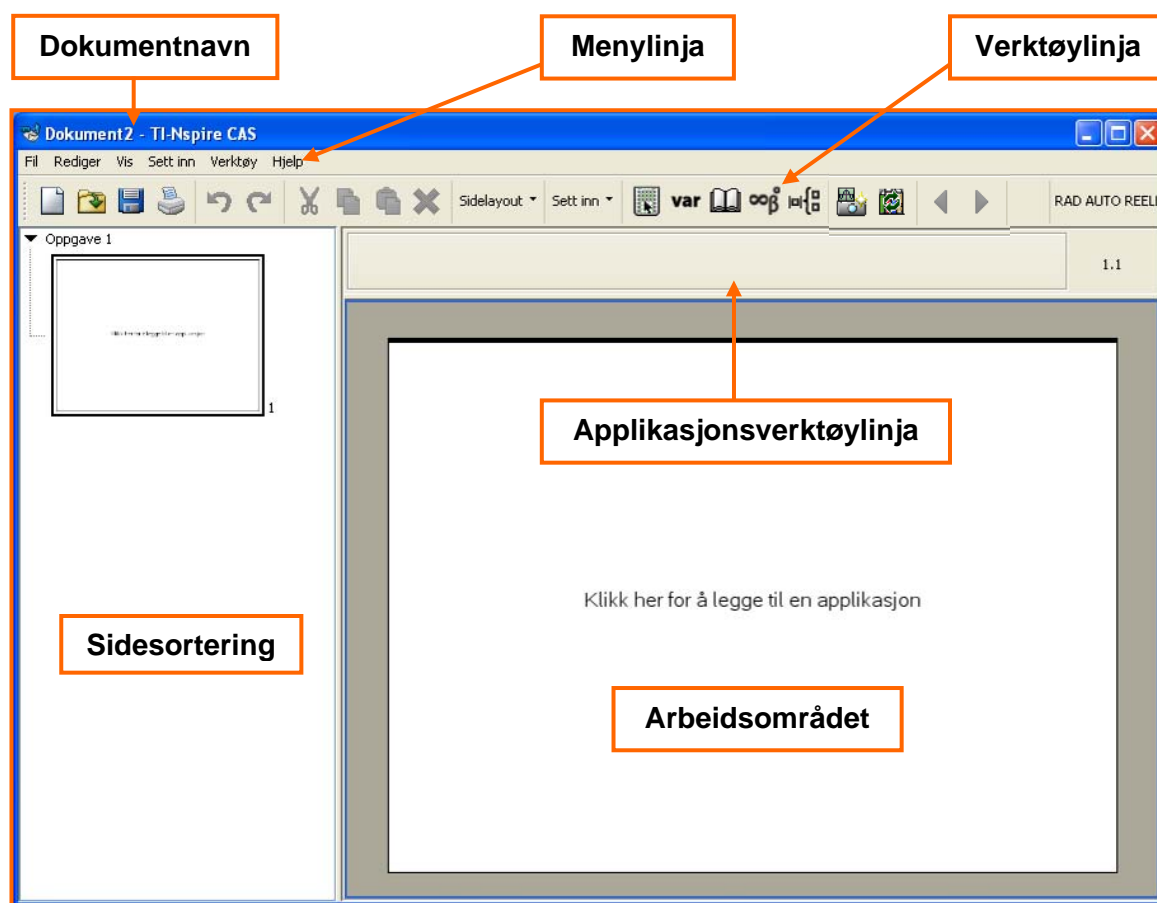
Innhold

Startskjermbildet	5
Verktøylinjene	6
Hovedverktøylinja	6
Verktøylinjene for Kalkulator og Grafer & geometri	7
Verktøylinja for Lister & regneark	7
Verktøylinjene for Notes og Data & statistikk	8
Tastaturet	8
Hurtigtaster	9
1: Rekker	10
9 – 15 Tallfølger	10
16 – 19 Rekker	11
30 – 41 Geometriske rekker i økonomi	11
2: Algebra	15
49 – 55 Faktorisering	15
55 – 63 Polynomdivisjon	16
63 – 69 Likningssett med to ukjente	17
69 – 73 Likningssett med flere ukjente	18
3: Derivasjon	19
77 – 87 Drøfting av funksjoner	19
87 – 94 Noen økonomiske eksempler	20
94 – 99 Derivasjon av sammensatte funksjoner	20
99 – 105 Den andrederiverte	21
107 – 113 Funksjoner med e som grunntall	22
114 – 125 Derivasjon av e - og \ln -funksjoner	23
4: Modellering	25
129 – 136 Kostnadsoptimal produksjonsmengde	25
136 – 139 Vinningsoptimal produksjonsmengde	25
140 – 143 Etterspørsel og optimal pris	26
143 – 156 Vekstmodeller	27
156 – 161 Areal under grafer	30

5: Sannsynlighet	32
165 – 170 Stokastiske variabler	32
170 – 177 Forventningsverdi	33
178 – 183 Varians og standardavvik	34
184 – 198 Normalfordelingen	34
198 – 205 Sentralgrensesetningen	36
206 – 213 Hypotesetesting.....	37

Startskjermbildet

I startskjermbildet finner du alle verktøyene du trenger for å opprette dokumenter og arbeide med oppgaver. Nedenfor ser du startskjermbildet med navn på hoveddelene.



Alt arbeidet som du oppretter og lagrer blir lagret som et **dokument**. Et dokument består av én eller flere **oppgaver**. Hver oppgave inneholder én eller flere **sider**. En enkelt side vises i arbeidsområdet på skjermen din. Alt arbeidet legges på sider.

Et dokument kan inneholde opptil **30** oppgaver, og hver oppgave kan inneholde maksimalt **50** sider.

Verktøylinjene

Hovedverktøylinja

The diagram shows the main toolbar of TI-nspire CAS with icons and their functions in Norwegian. Arrows point from specific icons to detailed views of those functions.

Icon	Function (Norwegian)
	Nytt dokument
	Åpne
	Lagre
	Skriv ut
	Angre
	Gjør om
	Klipp ut
	Kopier
	Lim inn
	Slette
	Sideoppsett
	Applikasjoner
	Tastatur
	Variabel/Koplin
	Katalog
	Symbolpalett
	Sjablonpalett
	Skjermbilde
	Oppdater
	Gå til forrige/neste side

Sideoppsett (Side Layout): Oppgave, Side (Ctrl+I), Kalkulator, Grafer & geometri, Lister & regneark, Notes, Data & statistikk, Programeditor, Datainsamling-konsoll (Ctrl+D).


Tastatur (Keyboard): A grid of function keys including trigonometric, logarithmic, and algebraic functions.


Applikasjoner (Applications): Vektor, Kompleks, Algebra, Trigonometri, Hyperbolsk, Kalkulus. (Bruk veiviser is checked).










Katalog (Catalog): A grid of mathematical symbols and constants like π , e , i , ∞ , θ , \rightarrow , $-$, \triangleright , $^{\circ}$, r , g , $'$, \angle , $=$, \neq , $<$, \leq , $>$, \geq , $-$, $+$, $-$, $*$, \cdot , \times , $/$, \div , $^$, \pm .










Symbolpalett (Symbol Palette): A grid of mathematical symbols and constants including $\frac{\square}{\square}$, \square° , $\sqrt{\square}$, $\sqrt[n]{\square}$, e^{\square} , $\log_{\square}\square$, $\{\square, \square\}$, $\{\square, \square, \square\}$, $\{\square, \square, \square, \square\}$, $\{\square, \square, \square, \square, \square\}$, $\lim_{\square \rightarrow \square} \square$.











Verktøylinjene for Kalkulator og Grafer & geometri











 Kalkulator

 Grafer & geometri




Handler	
Tall	
Algebra	
Kalkulus	
Sannsynlighet	
Statistikk	
Matrise & vektor	
Funksjoner & program	
Finansløser	



         

Handler	
Vis	
Graftype	
Vindu	
Spore	
Punkter & linjer	
Måling	
Former	
Konstruksjon	
Transformasjon	

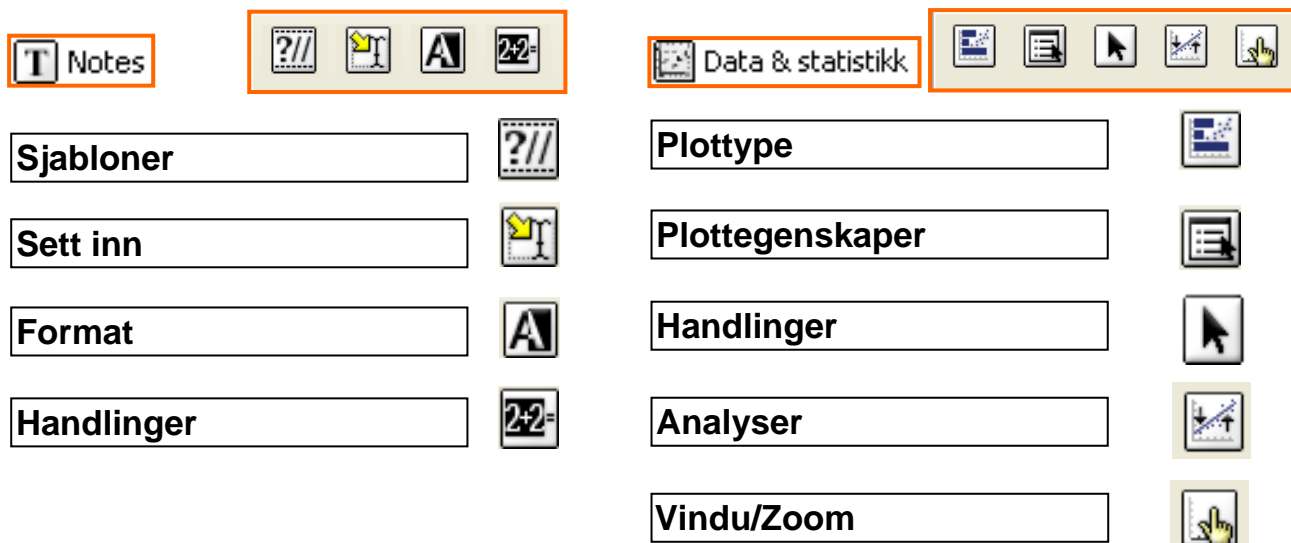
Verktøylinja for Lister & regneark

 Lister & regneark

Handler	
Sett inn	
Data	
Statistikk	
Funksjonstabell	

Verktøylinjene for Notes og Data & statistikk



I **TI-nspire CAS Hjelp** finner du nærmere beskrivelse av applikasjonsverktøylinjene. Klikk på Hjelp på menylinja eller trykk på **F1**-tasten.

















Tastaturet

Du kan vise og bruke et virtuelt tastatur, som fungerer på samme måte som tastaturet på den håndholdte kalkulatoren. Du kan bruke tastaturet når du **legger inn uttrykk** og **utfører beregninger** akkurat som du gjør med kalkulatoren. Mange av fremgangsmåtene i **TI-nspire CAS Hjelp F1**, som du finner under **Hjelp** på menylinja eller ved å bruke **F1**-tasten, går ut på å trykke på tastene på kalkulatoren. Noen av disse tastene er også tilgjengelige på tastaturet på datamaskinen din, og hvis du viser og bruker det virtuelle tastaturet, vil du ha tilgang til de fleste funksjonene og hurtigtastene på kalkulatorens tastatur.



Hurtigtaster

I tabellen nedenfor finner du en liste over noen hurtigtastkombinasjoner på **PC**-tastaturet og en del av **tastaturet** på kalkulatoren. Vær oppmerksom på at alle alternativene ikke alltid er tilgjengelige, avhengig av hva du arbeider med.


Redigere tekst	PC	Navigasjon	PC
Klipp ut	Ctrl+X	Hjem	Ctrl+Home
Kopier	Ctrl+C	Slutt	Ctrl+End
Lim inn	Ctrl+V	Sett inn tegn, symboler	Tastatur
Angre	Ctrl+Z	Ikke lik	 
Gjør om	Ctrl+Y	Senket strek	 
Dokumentstyring	PC	\geq	 
Opprette nytt dokument	Ctrl+N	\leq	 
Sette inn ny side	Ctrl+I	Semikolon	 
Velg applikasjon	Ctrl+K	∞	 
Lagre aktuelt dokument	Ctrl+S	\$	 
Hjelp	PC	Symbol for grader	 
TI-Nspire CAS Hjelp	F1	Symbolet e	@e

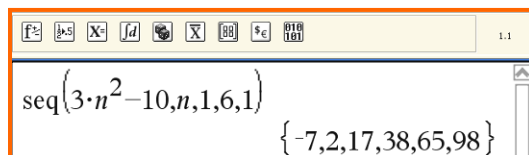
1: Rekker

9 – 15 Tallfølger

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 3 Fra formel til tallfølge

Tallfølgen får du ved å taste  **Listeoperasjoner** ► **Sekvens** $3 \cdot n^2 - 10$, $n, 1, 6, 1$.


**Eksempel 6 Tallfølge med digitale verktøy**

Legg inn en **Lister & regneark** applikasjon: Klikk  Sett inn  Lister & regneark.

Finn leddene i tallfølgen $a_n = 2n^2 + n - 1$ ved hjelp av regnearket. Følg disse tre punktene:

1. Legg inn tallet 1 i celle A1
2. Skriv inn formelen $=A1+1$ i A2, og kopier den nedover kolonne A
3. Skriv inn formelen $=2 \cdot A1^2 + A1 - 1$ i B1 og kopier den nedover kolonne B

Formelen i ei celle kopierer du nedover ved først å velge cella med formelen som skal kopieres. Deretter klikker du

 **Fyll ned**, og \downarrow så mange ganger at du får riktig antall celler i kolonnen. Avslutt med \leftarrow . Cellene i kolonnene A og B er kopiert over til de tilsvarende cellene i kolonnene C og D. Etter at celle C1 ble endret fra 1 til -5, mens C1 fortsatt var merket, ga et trykk på \leftarrow -tasten de nye tallene i kolonnene C og D.

	B	C	D
1	1	2	-5
2	2	9	-4
3	3	20	-3
4	4	35	-2
5	5	54	-1
6	6	77	0

D1 $= 2 \cdot C1^2 + C1 - 1$

Uttrykket for det n -te leddet i en tallfølge, for eksempel formelen for trekantallene, kan vi finne ved regresjon:

1. Legg inn leddnumrene i kolonne A og tilhørende tall i kolonne B. La de to kolonnene få listenavnene l1 og l2.
2. Du kan prøve fram med forskjellige regresjonsfunksjoner. Den som passer best er andregradsfunksjonen.

3. Regnearket gir resultatet

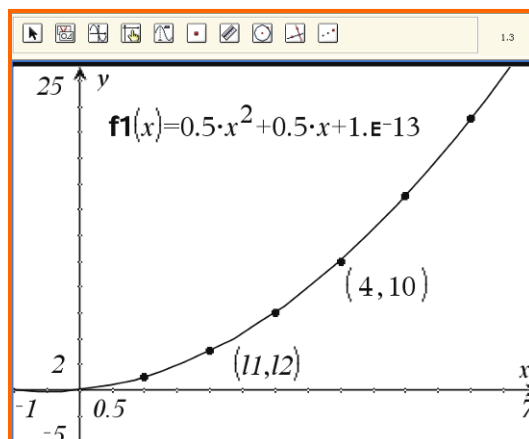
$$f1(x) = 0,5x^2 + 0,5x \quad (1.E-13 \approx 0)$$

4. Dette stemmer med tallfølgen

$$5. \quad a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = 0,5n^2 + 0,5n$$

A	B	C	D
1	1	1	Tittel
2	2	3	RegEq...
3	3	6	a
4	4	10	b
5	5	15	c
6	6	21	R^2

D2 $= "a \cdot x^2 + b \cdot x + c"$




16 – 19 Rekker

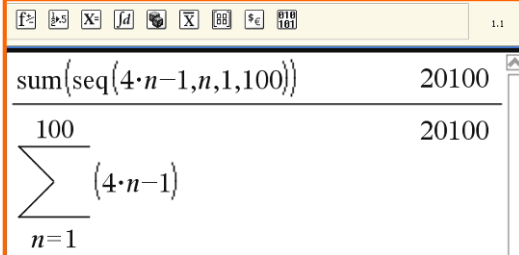
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 2 Rekker med digitale verktøy

Summen får du ved å taste  Listematematikk ► **Sum av elementer**  Listeoperasjoner ► **Sekvens** $4n-1$, $n, 1, 100$ ↵

eller

 Sum n ↵ 1 ↵ 100 ↵ $4n-1$ ↵



The image shows the TI-nspire CAS interface. The top toolbar includes icons for File, Edit, List, Sum, Sequence, and others. The main display area shows the calculation of the sum of the sequence $4n-1$ for n from 1 to 100. The result is 20100. Below the result, the summation formula is displayed:
$$\sum_{n=1}^{100} (4n-1)$$

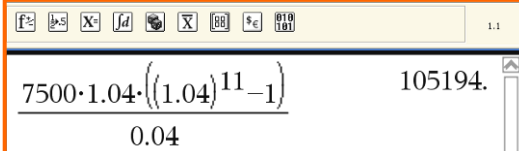
30 – 41 Geometriske rekker i økonomi

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 2 Sparing

Alternativ 1:

Tast inn uttrykket for summen av den geometriske rekka og avslutt med ↵



The image shows the TI-nspire CAS interface. The top toolbar includes icons for File, Edit, List, Sum, Sequence, and others. The main display area shows the calculation of the sum of a geometric sequence:
$$\frac{7500 \cdot 1.04 \cdot ((1.04)^{11} - 1)}{0.04}$$
 The result is 105194.

Alternativ 2:

Bruk finansiøseren. Klikk/tast  **Finansiøser**.


Skriv inn de aktuelle verdiene i feltene som figuren til høyre viser.

Nederst i **Finansiøser**-vinduet ser du en kort definisjon for hvert av feltene.

Den framtidige verdien FV, det vil si beløpet på Gunnars konto når spareavtalen utløper, får du fram ved først å flytte markøren til FV-feltet.

Deretter taster du ↵

Gunnar har 105 194 kroner på kontoen når spareavtalen utløper.



The image shows the TI-nspire Financial Solver interface. The top toolbar includes icons for File, Edit, List, Sum, Sequence, and others. The main display area shows the Financial Solver window with the following values entered:

- N: 11
- I(%): 4
- PV: 0.
- Pmt: -7500
- FV: 105193.54098144
- PpY: 1
- CpY: 1
- PmtAt: START

At the bottom, there is a button that says "Trykk på ENTER for å beregne Fremtidig verdi, FV".

Eksempel 3 Å spare til sin første million

Alternativ 1 og 2:

Bruk likningsløseren ved å klikke **X=** **Løs**. Deretter taster du inn uttrykket for summen av den geometriske rekka, setter den større enn 1000000 og avslutter med **,n↵**.

De årlige innskuddene må være mer enn x kr for at Johanne skal ha mer enn 1 000 000 kr på kontoen rett etter det 18. innskuddet.

Vi bruker likningsløseren på summeformelen for den tilhørende geometriske rekka, setter summen større enn 1000000 og avslutter med **,x↵**.

Johanne må sette inn minst 36 553 kr hvert år for at hun skal passere én million kroner på kontoen like etter det 18. innskuddet.

Alternativ 3:

Bruk finansløseren. Klikk **\$€** **Finansløser**.

Skriv inn de aktuelle verdiene i feltene som skjermbildene til høyre viser.

Nederst i **Finansløser**-vinduet ser du en kort definisjon for hvert av feltene.

Den årlige innbetalingen **Pmt**, det vil si innskuddet (negativ verdi i bildet) første året, får du fram ved først å flytte markøren til **Pmt**-feltet. Deretter taster du **↵**.

Johanne passerer én million på kontoen i løpet av det 23. året.

Eksempel 4 Annuitetslån ved sluttverdier

Alternativ 1:

Bruk likningsløseren ved å klikke **X=** **Løs**. Deretter taster du inn uttrykket for summen av den geometriske rekka, setter den lik $1200000 \cdot 1.05^{20}$ og avslutter med **,x↵**.

De årlige terminbeløpene må være x kr for at Kristin skal ha betalt lånet på 1 200 000 kr i løpet av 20 år.

Alternativ 2:

Vi kan også bruke likningsløseren på summeformelen for den tilhørende geometriske rekka, setter summen lik $1200000 \cdot 1.05^{20}$ og avslutter med **,x↵**.

Terminbeløpet er 96 291 kr.


TI-nspire CAS screen showing the solve function for a geometric series sum. The input is $\text{solve}\left(\frac{25000 \cdot 1.047 \cdot ((1.047)^n - 1)}{1.047 - 1} > 1000000, n\right)$. The result is $n > 22.3835$.

TI-nspire CAS screen showing the solve function for a geometric series sum with variable x . The input is $\text{solve}\left(\frac{x \cdot ((1.047)^{18} - 1)}{1.047 - 1} > 1000000, x\right)$. The result is $x > 36552.8$.

TI-nspire Finance Solver window. The fields are: N: 22.383474501853, I(%): 4.7, PV: 0., Pmt: -25000, FV: 1000000, PpY: 1, CpY: 1, PmtAt: START. The instruction at the bottom is: Trykk på ENTER for å beregne Antall betalinger, N.

TI-nspire CAS screen showing the solve function for a geometric series sum. The input is $\text{solve}\left(\frac{x \cdot ((1.05)^{20} - 1)}{1.05 - 1} = 1200000 \cdot (1.05)^{20}, x\right)$. The result is $x = 96291.1$.

Alternativ 3:

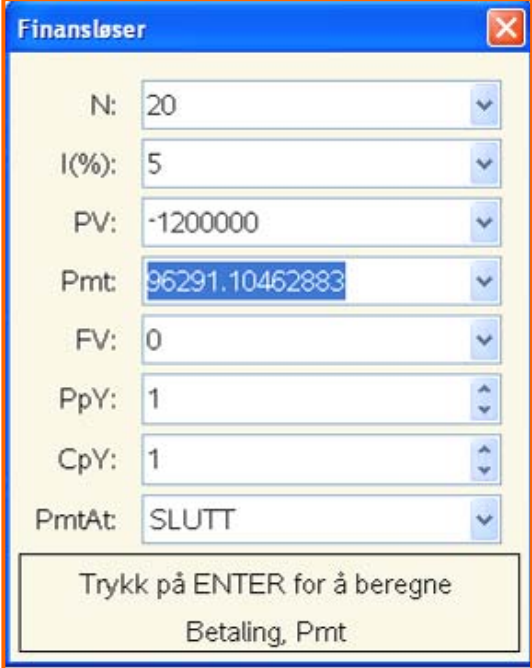
Bruk finansiøseren. Klikk  **Finansiøser**.

Skriv inn de aktuelle verdiene i feltene som skjermbildene til høyre viser.

Nederst i **Finansiøser**-vinduet ser du en kort definisjon for hvert av feltene.


Terminbeløpet får du fram ved å flytte markøren til **Pmt** - feltet. Deretter taster du \leftarrow .

Terminbeløpet er 96 291 kr.



Eksempel 5 Annuiteter ved nåverdier

Alternativ 1:

Bruk likningsløseren ved å klikke  **Løs**. Deretter taster du inn uttrykket for summen av den geometriske rekka, setter den lik 1200000 og avslutter med \leftarrow .

De årlige terminbeløpene må være x kr for at Kristin skal ha betalt lånet på 1 200 000 kr i løpet av 20 år.

Alternativ 2:

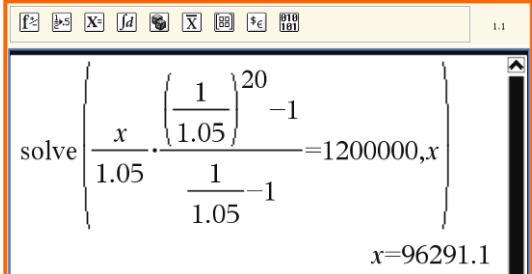
Vi kan også bruke likningsløseren på summeformelen for den tilhørende geometriske rekka, setter summen lik 1200000 og avslutter med \leftarrow .

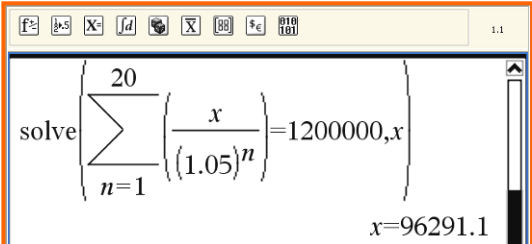
Terminbeløpet er 96 291 kr.

Alternativ 3:

Finansiøseren brukes på samme måte som i

Eksempel 4 Annuitetslån ved sluttverdier.



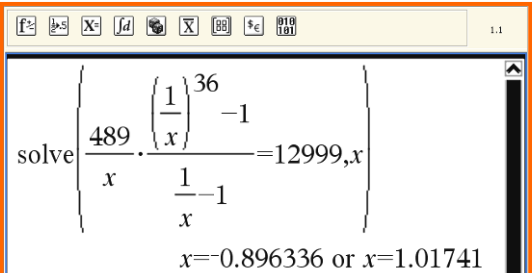


Eksempel 7 Hva koster det å handle på avbetaling?

Alternativ 1:

Bruk likningsløseren ved å klikke  **Løs**.

Deretter taster du inn uttrykket for summen av den geometriske rekka, setter den lik 12999 og avslutter med \leftarrow .



S2 og TI-nspire CAS

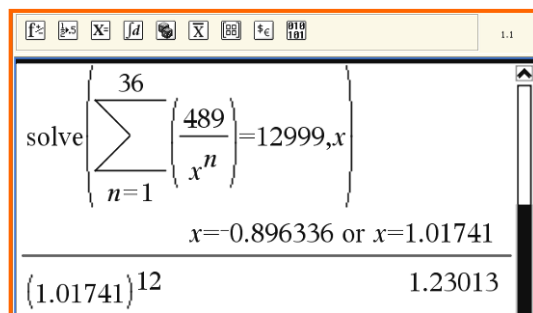
Alternativ 2:

Vi kan også bruke likningsløseren på summeformelen for den tilhørende geometriske rekka, setter summen lik 12999 og avslutter med ,**x↵** .

Vekstfaktoren må være positiv, det vil si at $x = 1,01741$.

Den årlige renta er gitt ved $x^{12} = 1,01741^{12} = 1,2301$.

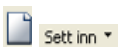


Renta er 1,74 % per måned, det vil si 23,0 % per år.



The image shows a TI-nspire CAS calculator screen. The top status bar displays various icons and the version number 1.1. The main display area shows the equation $\text{solve} \left(\sum_{n=1}^{36} \left(\frac{489}{x^n} \right) = 12999, x \right)$. Below the equation, the solutions are given as $x = -0.896336$ or $x = 1.01741$. A horizontal line separates the solutions from the final calculation $(1.01741)^{12}$, which results in 1.23013.

2: Algebra

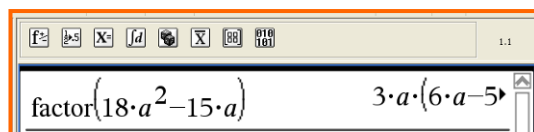
49 – 55 Faktorisering

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 1 Å faktorisere flerleddede uttrykk


Det andre uttrykket: klikke  **Faktor**.

Deretter legger du inn uttrykket i **factor** -parentesen og taster tilslutt \leftarrow .



$$\text{factor}(18 \cdot a^2 - 15 \cdot a) \quad 3 \cdot a \cdot (6 \cdot a - 5)$$

Eksempel 6 Når koeffisienten i andregradsleddet er -1

Klikk  **Faktor**.

Deretter legger du inn uttrykket i **factor** -parentesen og taster tilslutt \leftarrow .

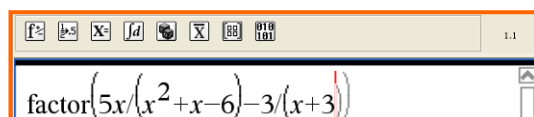


$$\text{factor}(-x^2 - x + 2) \quad -(x - 1) \cdot (x + 2)$$

Eksempel 9 og 10 Å trekke sammen rasjonale uttrykk

Klikk  **Faktor**.

Deretter legger du inn uttrykket i **factor** -parentesen og taster tilslutt \leftarrow .



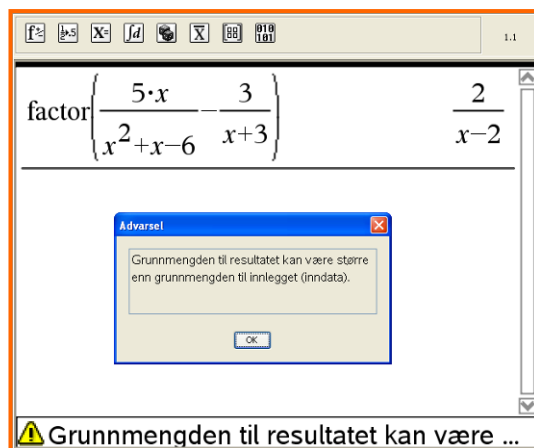
$$\text{factor}\left(\frac{5x}{x^2 + x - 6} - \frac{3}{x + 3}\right) \quad \frac{2}{x - 2}$$

Den øverste ramma viser inntastingen.

Den nederste ramma viser resultatet etter at du har brukt \leftarrow -tasten.

Nederst i kalkulatorvinduet kommer det fram en advarsel.

Hele teksten får du fram ved å taste \uparrow , høyreklikke på det merkede uttrykket og taste \leftarrow .






$$\text{factor}\left(\frac{5x}{x^2 + x - 6} - \frac{3}{x + 3}\right) \quad \frac{2}{x - 2}$$

Advarsel
Grunnmengden til resultatet kan være større enn grunnmengden til innlegget (inndata).

OK

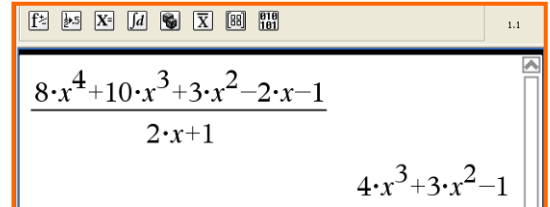
⚠ Grunnmengden til resultatet kan være ...

55 – 63 Polynomdivisjon

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 1 og 4 Å dividere polynomer


Skriv uttrykket for divisjonen direkte inn i kalkulatorvinduet. Tast $x^4 \rightarrow$ når du legger inn potensen x^4 . Tilsvarende tastetrykk utfører du også for x^3 . Avslutt med \leftarrow .





$$\frac{8x^4 + 10x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1} = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

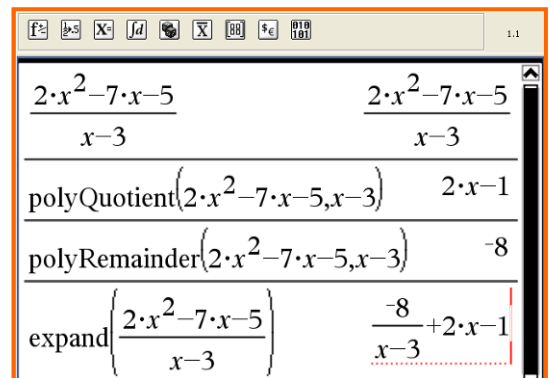
Eksempel 3 og 4 Når polynomdivisjonen ikke går opp

Skriv uttrykket for divisjonen direkte inn i kalkulatorvinduet. Avslutt med \leftarrow . Divisjonen går ikke opp.

$2x - 1$ får du ved først å klikke  **Polynomiske verktøy** ▶ **Kvotient av Polynom**. Skriv deretter dividend og divisor inn i kalkulatorvinduet som figuren til høyre viser. Avslutt med \leftarrow .


Resten -8 får du ved først å klikke  **Polynomiske verktøy** ▶ **Rest av Polynom**. Skriv deretter dividend og divisor inn i kalkulatorvinduet som figuren til høyre viser. Avslutt med \leftarrow .

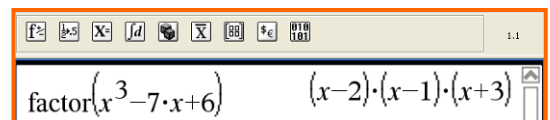
Resultatet av polynomdivisjonen får du direkte ved først å klikke  **Utvid**. Skriv uttrykket for divisjonen direkte inn i **expand**-parentesen. Avslutt med \leftarrow .



$$\begin{array}{l} \frac{2x^2 - 7x - 5}{x - 3} = 2x - 1 \\ \text{polyQuotient}(2x^2 - 7x - 5, x - 3) = 2x - 1 \\ \text{polyRemainder}(2x^2 - 7x - 5, x - 3) = -8 \\ \text{expand}\left(\frac{2x^2 - 7x - 5}{x - 3}\right) = \frac{-8}{x - 3} + 2x - 1 \end{array}$$


Eksempel 7 Å faktorisere tredjegradsuttrykk

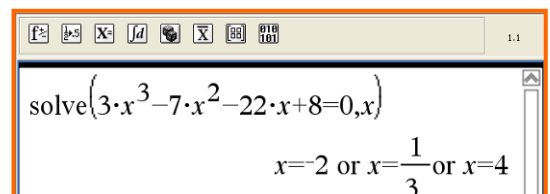
Klikk  **Faktor**. Deretter legger du inn uttrykket i **factor**-parentesen og taster tilslutt \leftarrow . NB! Tast $x^3 \rightarrow$ når du legger inn potensen x^3 .



$$\text{factor}(x^3 - 7x + 6) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$


Eksempel 8 En tredjegradslikning

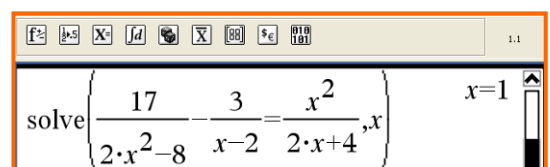
Klikk  **Løs**. Deretter legger du inn likningen i **solve**-parentesen og avslutter med \leftarrow . NB! Tast $x^3 \rightarrow$ når du legger inn potensen x^3 .



$$\text{solve}(3x^3 - 7x^2 - 22x + 8 = 0, x) = x = -2 \text{ or } x = \frac{1}{3} \text{ or } x = 4$$

Eksempel 10 og 11 Å løse en rasjonal likning

Klikk  **Løs**. Deretter legger du inn likningen i **solve**-parentesen og avslutter med \leftarrow .






$$\text{solve}\left(\frac{17}{2x^2 - 8} - \frac{3}{x - 2} = \frac{x^2}{2x + 4}, x\right) = x = 1$$

63 – 69 Likningssett med to ukjente

Eksempel 2 Å løse et likningssett grafisk


I grafapplikasjonen

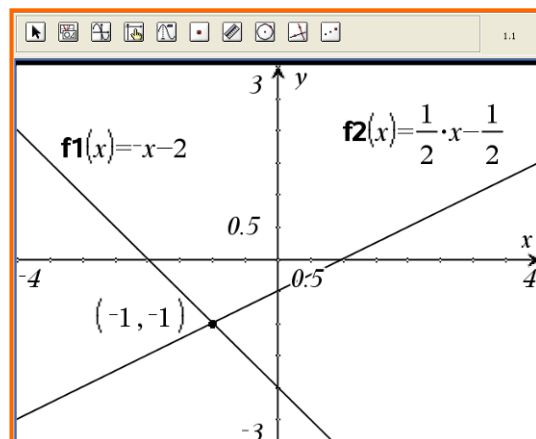
Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriverktøylinja.

På kommandolinja legger du inn funksjonsuttrykkene

$$f1(x) = -x - 2 \text{ og } f2(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Vi skal nå bestemme skjæringspunktet. Klikk .

 Skjæringspunkt(er). Flytt pila bort til den ene grafen inntil den blinker. Klikk på den eller tast **↵**. Flytt så pila til den andre grafen, klikk på den eller **↵**, og skjæringspunktet med koordinater blir lagt inn i grafvinduet.






Likningssettet har løsningen $x = -1$ og $y = -1$.

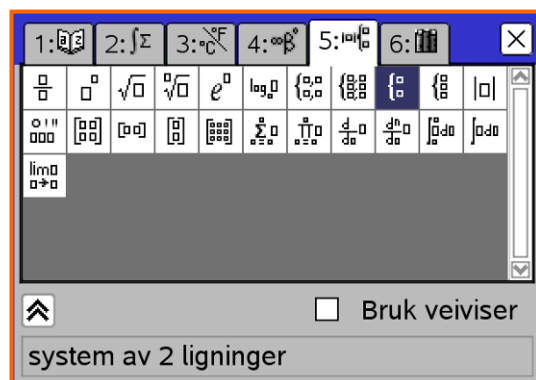
Eksempel 3 og 4 Å løse likningssett med symbolbehandlende verktøy

I kalkulatorapplikasjonen

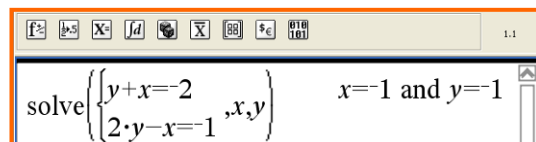
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Klikk  **Løs**, klikk  og tast 5, velg sjablonen **system av 2 ligninger**, skriv inn likningene og tast til slutt **,x,y↵**.

NB! Sjablon-paletten åpner du direkte ved å klikke .



Likningssettet har løsningen $x = -1$ og $y = -1$.



69 – 73 Likningssett med flere ukjente

Eksempel 3 og 4 Å løse likningssett med symbolbehandlende verktøy

I kalkulatorapplikasjonen

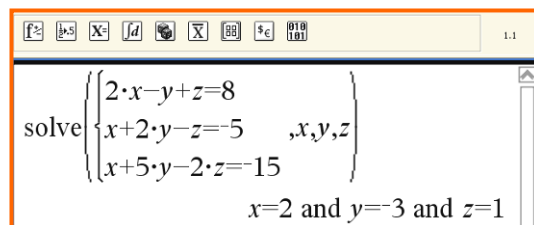
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Klikk  **Løs**, klikk  og tast 5, velg sjablonen **system av n ligninger**, skriv inn likningene og tast til slutt **,x,y,z↵**.

NB! Sjablon-paletten åpner du direkte ved å klikke .






Likningssettet har løsningen $x = 2$ og $y = -3$ og $z = 1$.






3: Derivasjon

77 – 87 Drøfting av funksjoner

Eksempel 2 Drøfting av en polynomfunksjon

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Den deriverte får du ved å klikke/taste  **Derivert x** . Skriv inn funksjonsuttrykket og tast **↵**.

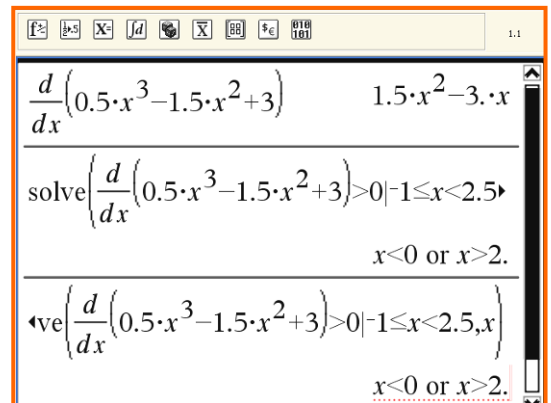
Du kan også bruke sjablonen for den deriverte som du finner i sjablonoversikten ved å klikke .

Fortegnslinja for den deriverte kan du finne ved å løse ulikheten $f'(x) > 0 \mid -1 \leq x < 2,5$. Løsningen blir:
 $x \in (-1, 0) \cup (2, 2,5)$.

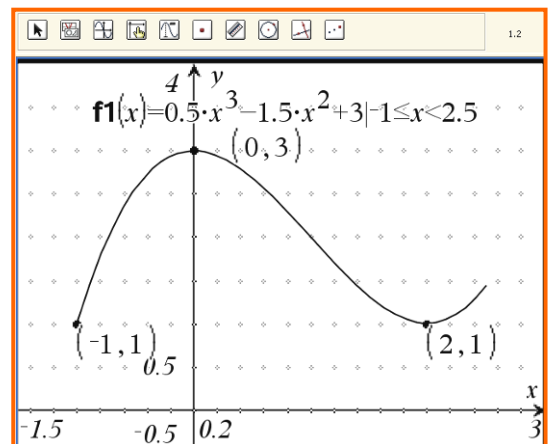
På grunnlag av løsningen kan du nå sette opp fortegnslinja.

Legg inn ei ny side, det vil si en graf-applikasjon i dokumentet, og tegn grafen innenfor definisjonsområdet.

Etter at du har lagt inn funksjonsuttrykket på kommandolinje, legger du inn definisjonsområdet ved å taste $-1 \leq x < 2,5$.



TI-nspire CAS screen showing the derivative of $f(x) = 0.5x^3 - 1.5x^2 + 3$ and solving the inequality $f'(x) > 0$ for $-1 \leq x < 2.5$. The screen displays the derivative $f'(x) = 1.5x^2 - 3x$ and the solution set $x < 0$ or $x > 2$.

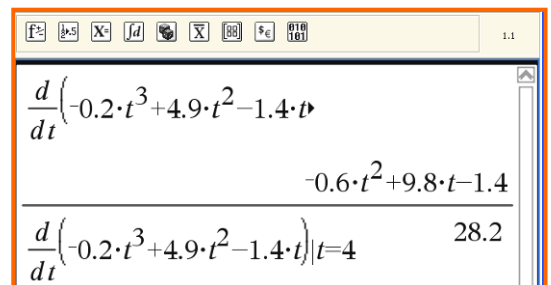


Eksempel 6, 7 og 8 Fallengde og fart i et fallskjermhopp

Den deriverte får du ved å klikke/taste  **Derivert t** .



Skriv inn uttrykket som skal deriveres og avslutt med **↵**.

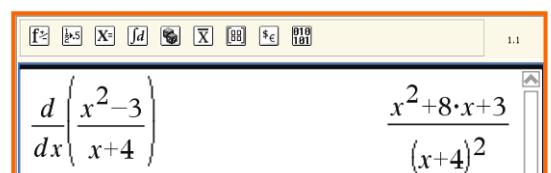
Verdien for den deriverte får du ved å legge til betingelsen: $t=4$. Avslutt med **↵**.



TI-nspire CAS screen showing the derivative of $-0.2t^3 + 4.9t^2 - 1.4t$ and evaluating it at $t=4$. The screen displays the derivative $-0.6t^2 + 9.8t - 1.4$ and the result 28.2 .

Eksempel 9 Å derivere en brøkfunksjon

Den deriverte får du ved å klikke/taste  **Derivert x** . Skriv inn uttrykket som skal deriveres og avslutt med **↵**.






TI-nspire CAS screen showing the derivative of $\frac{x^2 - 3}{x + 4}$. The screen displays the derivative $\frac{x^2 + 8x + 3}{(x + 4)^2}$.

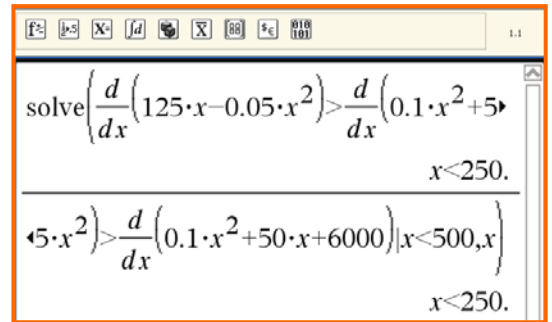
87 – 94 Noen økonomiske eksempler

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 2 Grensekostnad og grenseinntekt

Klikk  **Løs**. Den derivate får du ved å klikke/taste  **Derivert x**. Skriv inn funksjonsuttrykkene for både inntekt og kostnad. Bak grensekostnaden legger du inn betingelsen ved å taste **|x<500**. Avslutt ved å taste **,x↵**. Du kan også bruke sjablonen for den derivate. Den finner du i sjablonoversikten ved å klikke .

Det lønner seg å øke produksjonen ved 200 enheter, men ikke ved 300 enheter.



TI-nspire CAS skjerm viser følgende uttrykk:

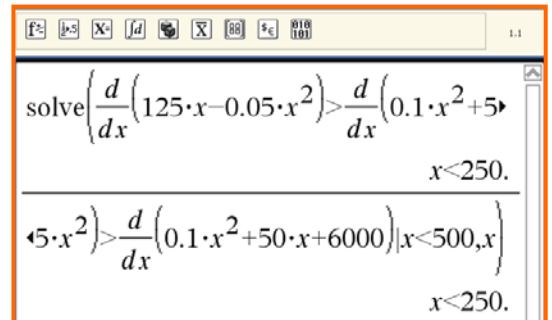
$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(125 \cdot x - 0.05 \cdot x^2) > \frac{d}{dx}(0.1 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3) \mid x < 250, x\right)$$

Eksempel 4 Største overskudd ved bruk av grensekostnad og grenseinntekt

Samme kalkulatorvindu som i **Eksempel 2** betyr at grenseinntekten går over fra å være større enn til å bli mindre enn grensekostnaden når salget passerer 250 enheter per dag.

Dette betyr:

Overskuddet er størst når det selges 250 enheter.




TI-nspire CAS skjerm viser følgende uttrykk:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(125 \cdot x - 0.05 \cdot x^2) > \frac{d}{dx}(0.1 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3) \mid x < 250, x\right)$$

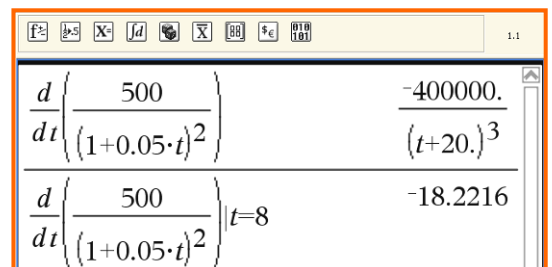
94 – 99 Derivasjon av sammensatte funksjoner

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 5 Truet dyreart

Klikk/tast  **Derivert t**. Skriv inn uttrykket som skal deriveres og legg til betingelsen: **|t=8**. Avslutt med **↵**.

Om 8 år vil bestanden minke med 18 dyr per år.



TI-nspire CAS skjerm viser følgende uttrykk:




$$\frac{d}{dt}\left(\frac{500}{(1+0.05 \cdot t)^2}\right) \Big|_{t=8} = \frac{-400000}{(t+20)^3} = -18.2216$$

99 – 105 Den andrederiverte

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 1 Å bestemme første og andrederiverte







Den andrederiverte får du ved å klikke/taste

 **1d**  **x**, skriv inn uttrykket og avslutt med .

eller

 **Derivert x**  **Derivert x** , skriv inn uttrykket og avslutt med .

eller

 **5**. Tast  eller  til du får markert sjablonen for **n-te derivert**. Se figuren til høyre. Tast **x**  **2** , skriv inn uttrykket og avslutt med .

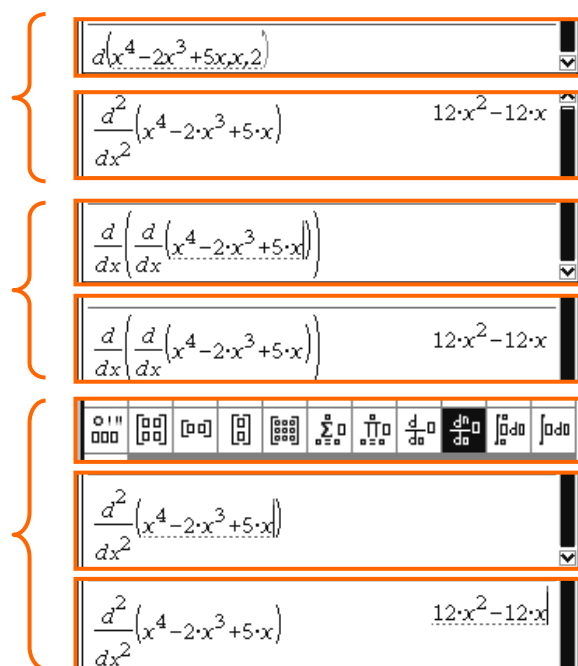










Diagram illustrating three methods to input the second derivative of $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x$ in TI-nspire CAS:

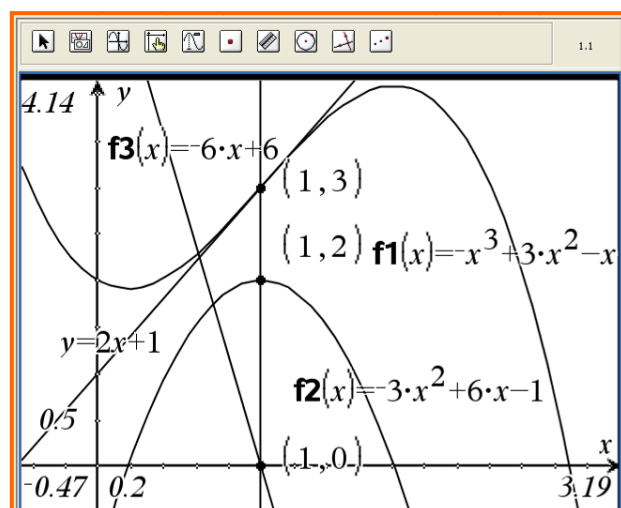
- Method 1: $\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x^3 + 5x)$ resulting in $12x^2 - 12x$.
- Method 2: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^4 - 2x^3 + 5x)\right)$ resulting in $12x^2 - 12x$.
- Method 3: $\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x^3 + 5x)$ resulting in $12x^2 - 12x$.

Eksempel 3 og 4 Når den andrederiverte skifter fortegn. Å bestemme vendepunktet.




Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometri verktøylinja.

Grafene for f , f' og f'' , det vil si henholdsvis **f1**, **f2** og **f3**, er lagt inn i grafvinduet. Konstantleddet i uttrykket for f er endret fra 1 til 2. En normal på x-aksen er tegnet gjennom nullpunktet for **f3**. Normalen skjærer grafen for **f2** i toppunktet (1, 2) og grafen for **f1** i vendepunktet (1, 3).





Tangenten i vendepunktet – vendetangenten – finner du ved først å taste  **Tangent**, flytte markøren til vendepunktet og taste  (vendetangenten kommer fram). Deretter taster du  **Koord. og lgn.**. Flytt markøren inntil den peker på den blinkende vendetangenten. Til slutt taster du  . Nå kan du se likningen $y = 2x + 1$ for vendetangenten.



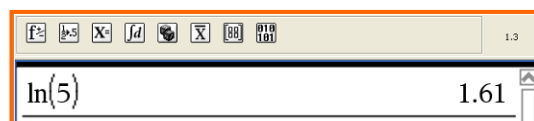
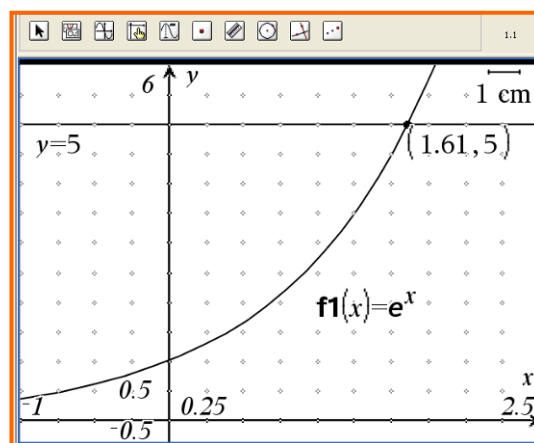
107 – 113 Funksjoner med e som grunntall

Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriversetkøylinja.







Eksempel 1 Å finne ln-verdien ved hjelp av grafen til e^x

Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriversetkøylinja. Skriv inn funksjonsuttrykket på kommandolinja ved å klikke/taste **@e^x ↵**. Kommandolinja kan du skjule eller vise ved å klikke  Skjul kommandolinje (Ctrl+G) eller bruke hurtigtastene **Ctrl G**. Det er lagt inn et punkt på grafen og en normal på y-aksen gjennom punktet. Trykk noen ganger på andrekoordinaten til punktet, fjern koordinaten og tast **5↵**. Førstekooriaten 1,61 er ln 5. Du kan gripe tak i punktet med markøren og skyve det opp eller ned på grafen, samtidig som normalen følger med i bevegelsen og koordinatene oppdateres.

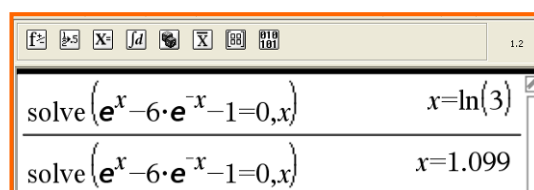
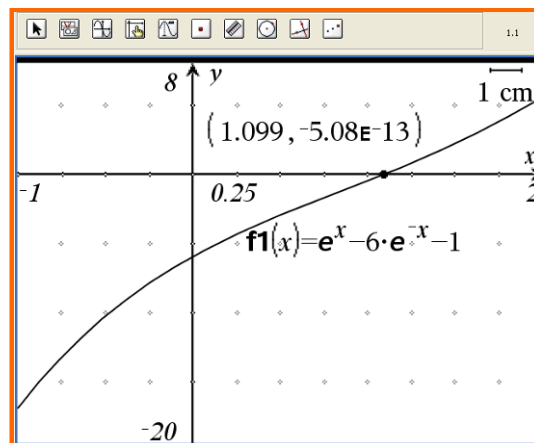
I kalkulatorapplikasjonen finner du ln 5 ved å taste **ln(5↵)**.



Eksempel 5 Eksponentiallikning av andre grad

Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriversetkøylinja. På kommandolinja skriver du inn likningens venstreside ved å klikke/taste **@e^x→-6@e^-x→-1↵**. Kommandolinja kan du skjule eller vise ved å klikke  Skjul kommandolinje (Ctrl+G) eller bruke hurtigtastene **Ctrl G**. Skjæringspunktet mellom grafen og x-aksen gir løsningen. Klikk  Skjæringspunkt(er) og merk både grafen og x-aksen med markøren. Koordinatene til skjæringspunktet kommer fram ved først å taste  Koord. og lgn. Deretter flytter du markøren bort til punktet. Når den peker på punktet taster du **↵↵** eller klikker to ganger. Løsningen er førstekoordinaten 1,099.

I kalkulatorapplikasjonen finner du løsningen ved å klikke/taste **X= Løs @e^x→-6@e^-x→-1=0,x↵**. Etter at du har fått den eksakte løsningen ln 3, finner du en tilnærmet løsning ved å klikke/taste **Ctrl ↵**.



Eksempel 7 og 8 Omforming av logaritmeuttrykk. En logaritmelikning.

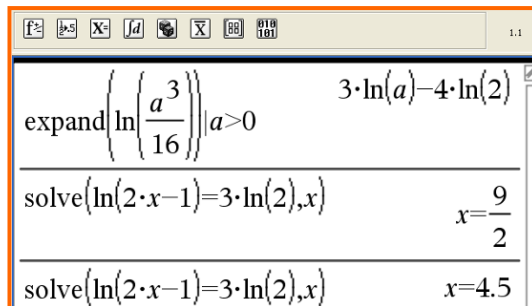
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og kalkulatorverktøylinja.

I kalkulatorapplikasjonen kan du omforme $\ln\left(\frac{a^3}{16}\right)$ ved å

klikke/taste  Utvid $\ln(a^3 \rightarrow /16 \rightarrow \rightarrow |a>0 \leftarrow$.

Likningen løser du ved å klikke  Løs $\ln(2x-1 \rightarrow =3\ln(2 \rightarrow ,x \leftarrow$.

Etter at du har fått den eksakte løsningen, finner du en tilnærmet løsning ved å taste **Ctrl** \leftarrow .




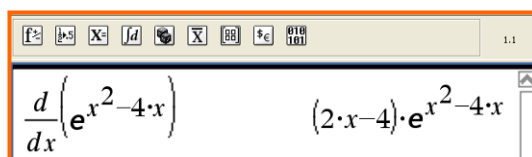
The screenshot shows the TI-nspire CAS interface. The top line displays the expansion of $\ln\left(\frac{a^3}{16}\right)$ as $3 \cdot \ln(a) - 4 \cdot \ln(2)$. Below this, the equation $\ln(2x-1) = 3 \cdot \ln(2)$ is solved for x , yielding the exact solution $x = \frac{9}{2}$ and a decimal approximation $x = 4.5$.

114 – 125 Derivasjon av e- og ln-funksjoner

Eksempel 4 Å derivere en eksponentialfunksjon




Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.


Klikk/tast  Derivert $x \leftarrow$. Skriv inn funksjonsuttrykket og avslutt med \leftarrow . (Hurtigtaster for **e** er **@e**.)

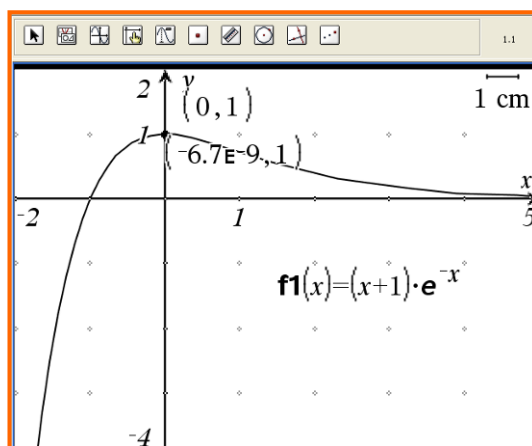




The screenshot shows the TI-nspire CAS interface. The derivative of e^{x^2-4x} is calculated, resulting in $(2x-4) \cdot e^{x^2-4x}$.

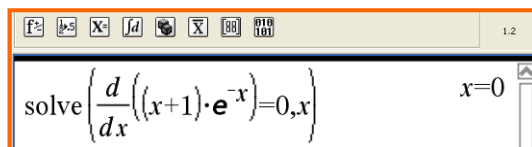
Eksempel 7 Å finne topp- og bunnpunkter

Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriverktøylinja.

På kommandolinja skriver du inn funksjonsuttrykket ved å taste $(x+1)@e^{-x} \leftarrow$. Legg inn et punkt på grafen ved først å taste  Punkt på. Deretter flytter du markøren bort til grafen slik at blyantspissen peker på grafen. Trykk på **Esc**-tasten på PC-tastaturet. Flytt punktet mot toppunktet, en **M** for maksimal kommer fram, og tast \leftarrow . Får du for eksempel -6.7E-9 som førstekoordinat tolker vi dette tallet som 0.



I kalkulatorapplikasjonen finner du nullpunktet for den deriverte ved å klikke  Løs  Derivert $X \leftarrow (x+1 \rightarrow @e^{-x} \leftarrow =0, x \leftarrow$.





The screenshot shows the TI-nspire CAS interface. The equation $\frac{d}{dx}((x+1) \cdot e^{-x}) = 0$ is solved for x , yielding the solution $x = 0$.

Eksempel 14 Fortegnslinja for den deriverte av $\ln(x^2 + 2x)$

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.




Klikk  **Løs**. Skriv inn ulikheten $x^2 + 2x > 0$ og avslutt med **,x ↵**. Du får definisjonsmengden for $f(x)$.

Undersøk nå hvor den deriverte er positiv. Tast Klikk  **Løs**. Den deriverte får du ved å taste  **Derivert X ↵**.

Skriv inn funksjonsuttrykket og tast **>0,x↵** til høyre for dobbelparentesen.

Utenfor parentesen legger du inn betingelsen ved å taste: **and (x<-2 or x>0↵**.

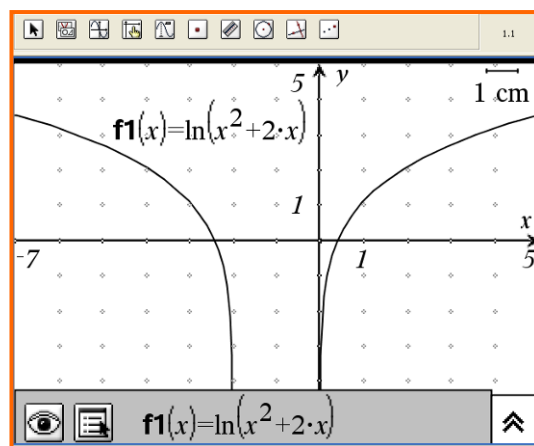
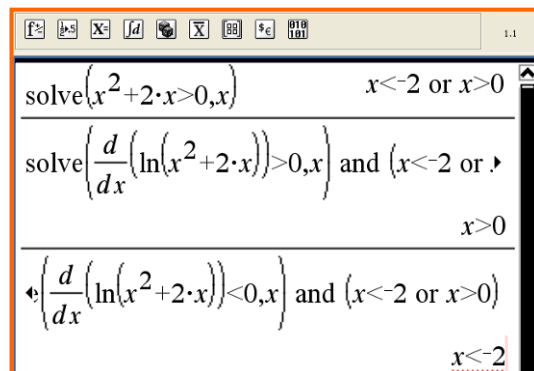
Du kan nå kopiere kommandoen for den deriverte større enn null inn på neste kommandolinje. Deretter passer du på å endre betingelsen for den deriverte til < 0 . Nå ser du at: $f'(x) > 0$ for $x > 0$ og $f'(x) < 0$ for $x < -2$

Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometri verktøylinja.

På kommandolinja skriver du inn funksjonsuttrykket ved å taste **ln(x^2+2x ↵**.




I grafvinduet tegner du grafen til f .

Kontroller at fortegnene for $f'(x)$ stemmer med grafen.



4: Modellering

129 – 136 Kostnadsoptimal produksjonsmengde

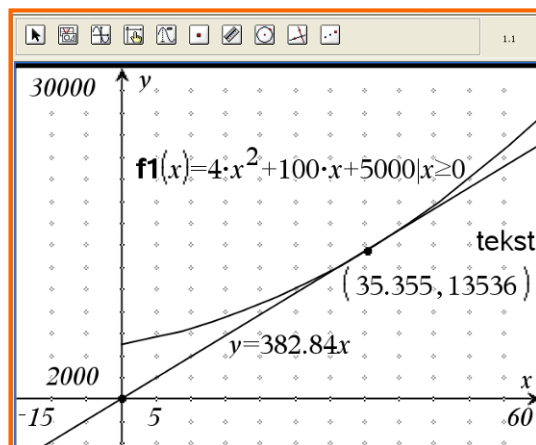
Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometri verktøylinja.

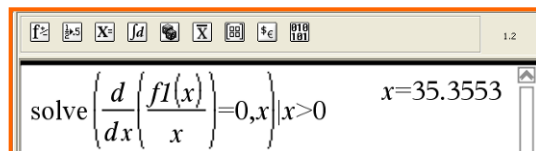
Eksempel 2 Kostnadsoptimal produksjonsmengde

Bruk applikasjonen Grafer & geometri. På kommandolinja legger du inn funksjonsuttrykket med betingelsen $x \geq 0$. Bak funksjonsuttrykket taster du $|x \geq 0|$. Deretter legger du inn et punkt på grafen til funksjonen **f1** og ei linje gjennom origo og punktet på grafen. Legg inn koordinatene til punktet og likningen for linja. Linja er nå den tangenten til grafen som går gjennom origo.

Legg til applikasjonen Kalkulator i dokumentet. Der finner du det positive nullpunktet for den deriverte til enhetskostnaden. Nullpunktet kopierer du over til førstekoordinaten for punktet på grafen. Den miste enhetskostnaden er nå gitt ved stigningstallet til tangenten. Av punktkoordinatene finner du den kostnadsoptimale produksjonsmengden.

Som et alternativ kan du gripe tak i punktet og flytte det langs grafen inntil stigningstallet til linja blir minst mulig. Da har du fått ei rett linje som tilnærmet svarer til tangenten til grafen som går gjennom origo.








Skjermbilde av Kalkulator applikasjonen. Den viser løsningsprosessen for å finne den optimale produksjonsmengden:

$$\text{solve} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{f1(x)}{x} \right) = 0, x \right) | x > 0 \quad x = 35.353$$


136 – 139 Vinningsoptimal produksjonsmengde

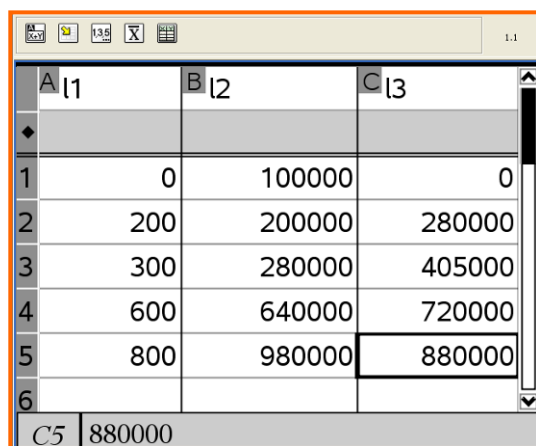
Eksempel 1 og 2 Å finne vinningsoptimal produksjonsmengde og dekningspunktene

Klikk  Sett inn  Lister & regneark. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometri verktøylinja.

I applikasjonen Lister & regneark legger du inn antall og beløp som figuren til høyre viser.

Sett navn på kolonnene, for eksempel l1, l2 og l3.

Tast  **Stat beregning...** ► **Kvadratisk regresjon**, fyll inn de riktige listenavnene i dialogboksen; første gang l1 og l2, og andre gang l1 og l3.



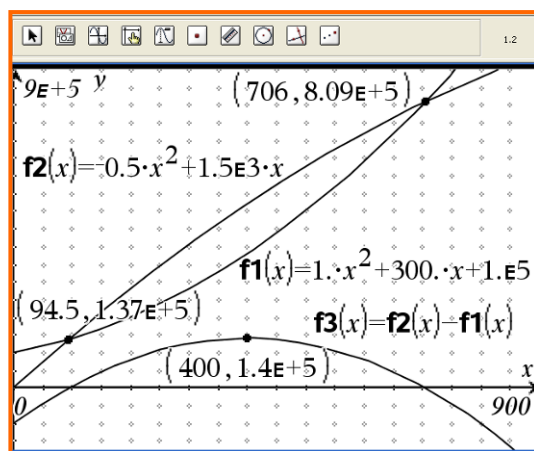
	A l1	B l2	C l3
1	0	100000	0
2	200	200000	280000
3	300	280000	405000
4	600	640000	720000
5	800	980000	880000
6			
	C5	880000	

Verdiene for a, b og c legges inn i tabellen etter at du trykker på OK-knappen i dialogboksen.

Konstanten $c = -5.E-8$ ser vi bort fra.

	D	E	F	G
		=QuadReg		=QuadReg
1	Tittel	Kvadrat...	Tittel	Kvadratis...
2	RegE...	$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	RegE...	$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
3	a	1.	a	-0.5
4	b	300.	b	1.5E3
5	c	1.E5	c	-5.E-8
6	R ²	1.	R ²	1.
	G5 = -5.E-8			

Legg til ei ny side med applikasjonen Grafer & geometri. Der finner du de to regresjonsfunksjonene f1 og f2. Grafene til de to funksjonene kommer fram i vinduet etter at du tilpasser vinduet til grafene over definisjonsområdet, for eksempel 0 til 900. I tillegg kan du tegne grafen for $f3(x) = f2(x) - f1(x)$, det vil si overskuddsfunksjonen. Grensekostnaden er lik grenseinntekten for den vinningsoptimale produksjonsmengden, altså for den produksjonsmengden som gir størst overskudd. Dekningspunktene finner du ved hjelp av skjæringspunktene mellom kostnads- og inntektsfunksjonen, eller i nullpunktene til overskuddsfunksjonen.



140 – 143 Etterspørsel og optimal pris

Klikk Sett inn Kalkulator. Klikk på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 2 Å fastsette prisen som gir størst inntekt og prisen som gir størst overskudd




Klikk Løs Derivert p. Skriv inn et av uttrykkene for inntekten og tast deretter $\rightarrow > 0, p \leq 10 \leq p \leq 30 \leftarrow$. Dette viser at $I'(p) > 0$ når $10 \leq p < 20$. På samme måte får du at $I'(p) < 0$ når $20 < p < 30$. Vi forstår at $I'(20) = 0$. Dette viser at inntekten er størst når prisen er 20 kr per enhet.

Finn uttrykket for den deriverte av overskuddet. Deretter undersøker du når $O'(p) > 0$ og når $O'(p) < 0$. I tillegg ser du at $O'(26) = 0$. På dette grunnlaget kan du sette opp fortegnskjemaet for $O'(p)$.




$\text{solve}\left(\frac{d}{dp}(p \cdot (600 - 15 \cdot p)) > 0, p\right) 10 \leq p \leq 30$	$10 \leq p < 20$
$\frac{d}{dp}(-15 \cdot p^2 + 780 \cdot p - 8000)$	$780 - 30 \cdot p$
$\text{solve}(780 - 30 \cdot p > 0, p) 10 \leq p \leq 30$	$10 \leq p < 26$
$-15 \cdot p^2 + 780 \cdot p - 8000 p = 26$	2140

Det største overskuddet per dag blir 2140 kr. Prisen er da 26 kr per enhet.

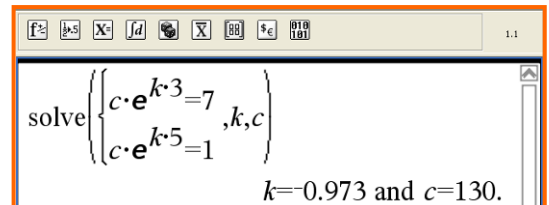
143 – 156 Vekstmodeller

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 1 Å bestemme en eksponentialfunksjon

Klikk  Løs , velg sjablonen for to likninger med to ukjente, skriv inn hver av likningene med  etter hver av dem, og til slutt **k,c↵**.

Verdiene for c og k kommer fram i vinduet.



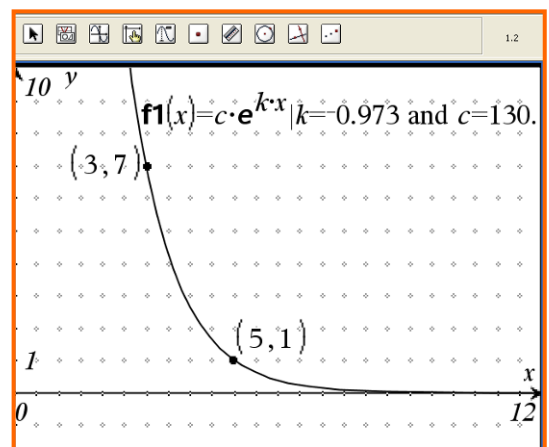
$$\text{solve} \left\{ \begin{array}{l} c \cdot e^{k \cdot 3} = 7 \\ c \cdot e^{k \cdot 5} = 1 \end{array} \right\}, k, c$$

$k = -0.973$ and $c = 130$.




Nå kan du tegne grafen for eksponentialfunksjonen.

Bruk applikasjonen Grafer & geometri.


Punktene (3,7) og (5,1) ligger på grafen til f .



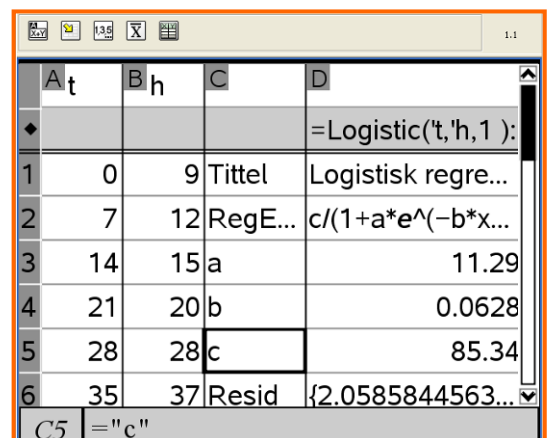
Eksempel 3 Logistisk regresjon

Klikk  Sett inn  Lister & regneark. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriverktøylinja.

I applikasjonen Lister & regneark legger du inn tida og høyden som figuren til høyre viser.

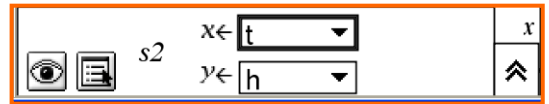
Sett navn på kolonnene, for eksempel t og h. Klikk  Stat beregning... ► **Logistisk regresjon (d=0)** og fyll inn de riktige listenavnene t og h i dialogboksen **Logistisk regresjon (d=0)**.

Verdiene for a, b og c legges inn i tabellen etter at du trykker på **OK**-knappen i dialogboksen.



	A:t	B:h	C	D
				=Logistic('t','h,1):
1	0	9	Tittel	Logistisk regre...
2	7	12	RegE...	$c/(1+a \cdot e^{(-b \cdot x)}$
3	14	15	a	11.29
4	21	20	b	0.0628
5	28	28	c	85.34
6	35	37	Resid	{2.0585844563...
C5				"c"

Legg til ei ny side med applikasjonen Grafer & geometri. Der finner du regresjonsfunksjonen som f1.

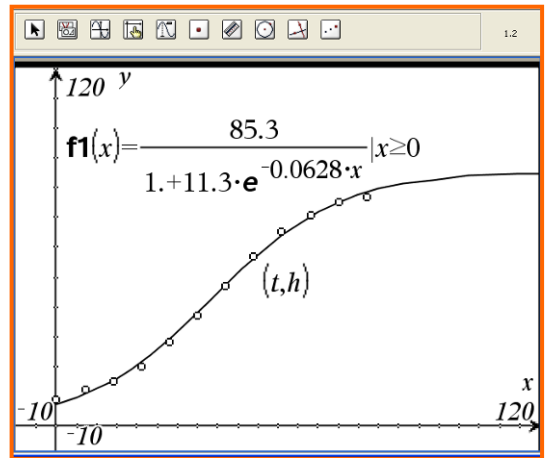


Grafen til funksjonen kommer fram i vinduet etter at du tilpasser vinduet til grafen over definisjonsområdet, for eksempel 0 til 120.

Punktene kommer fram ved å klikke

Spredningsdiagram og deretter aktivere navnet t for x og h for y på kommandolinja.

Vi ser at grafen gir en god beskrivelse utviklingen i tidsrommet som måledataene er hentet fra.



Eksempel 4 Logistiske funksjoner med glidere

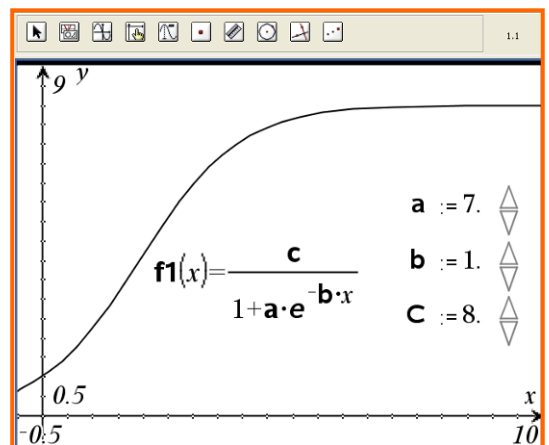
Klikk Sett inn Grafer & geometri. Klikk på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometri verktøylinja.

Legg inn funksjonsuttrykket på kommandolinja. Deretter velger du et vindu der for eksempel definisjonsområdet er fra -0,5 til 10 og verdimengden er fra -1 til 9.

Legg inn en glider for hver av parameterne **a**, **b** og **c**.

Glideren (skyvekontrollen) legger du inn ved å taste Skyvekontroll. Innstillingen for glideren kan du endre ved å flytte markøren bort til den, høyreklikke og taste .

Legg merke til at du kan animere funksjonen, og hvordan **a**, **b** og **c** forandrer seg i trå med framdriften i animasjonen.



Eksempel 5 Å bestemme en logistisk funksjon

Klikk Sett inn Kalkulator. Klikk på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Klikk **Løs** , velg sjablonen for tre likninger med tre ukjente, skriv inn hver av likningene med etter hver av dem, og til slutt **a,b,c** .

Verdiene for **a**, **b** og **c** kommer fram i vinduet.

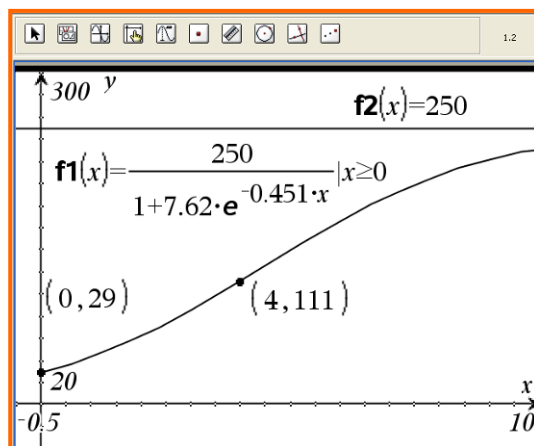
Nå kan du tegne grafen for den logistiske funksjonen.

Bruk applikasjonen Grafer & geometri:

Klikk  Grafer & geometri.

Tilpass vinduet til grafen over definisjonsområdet, for eksempel 0 til 10.


Punktene (0,29) og (4,111) ligger på grafen til f . I tillegg ser du at grafen smyer seg inn til linja $y = 250$.



Eksempel 6 Utnytting av fiskeressurs


Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Undersøk nå hvor den andrederiverte er positiv. Klikk .

Løs . Sjablonen for den andrederiverte finner du ytterst til høyre i andre rad. Merk sjablonen og tast \leftarrow $\frac{d^2}{dt^2}$. Skriv inn funksjonsuttrykket og tast $>0, t \leftarrow$ framfor den siste høyreparentesen.

Du kan nå kopiere kommandoen for den andrederiverte større enn null inn på neste kommandolinje. Deretter passer du på å endre betingelsen for den til < 0 . Nå får du:

$$f''(x) > 0 \text{ for } x < 11 \text{ og } f''(x) < 0 \text{ for } x > 11 \text{ og } f'(11) = 1$$

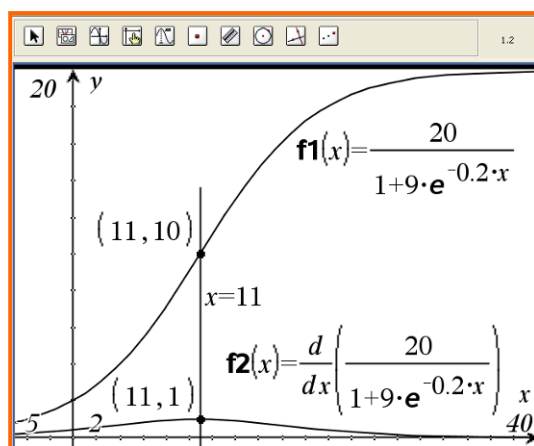
Legg til ei ny side i dokumentet ved å klikke .

 Grafer & geometri.




I grafvinduet tegner du grafene til $N(t)$ og $N'(t)$, henholdsvis $f1(x)$ og $f2(x)$.

Du kan nå kontrollere at fortegnene for $N''(t)$ stemmer med grafen. Vendepunktet på grafen til $N(t)$ har samme førstekoordinat som toppunktet på grafen til $N'(t)$.

Etter 11 år er vekstfarten, 1 million tonn per år, størst.





156 – 161 Areal under grafer


Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriverktøylinja.

Eksempel sidene 156 og 157. Arealet under en graf

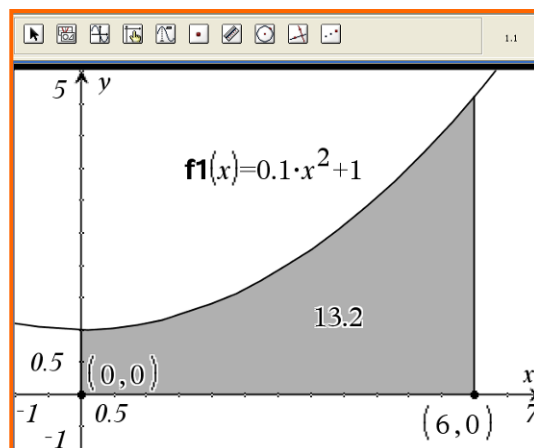
Alternativ 1

Skriv inn funksjonsuttrykket på kommandolinja.





Klikk   Akser innstillings-dialog. I **Vindusparametere** legger du inn XMin = -1, XMaks = 7, YMin = -1 og YMaks = 5.

Klikk  Integral, klikk på grafen med markøren og tast $0 \leftarrow 6 \leftarrow$.

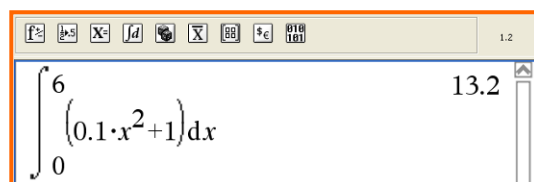
Verdien for det bestemte integralet (arealet mellom grafen, x-aksen og de to lodrette linjene $x = 0$ (y-aksen) og $x = 6$) kommer fram i vinduet.




Alternativ 2

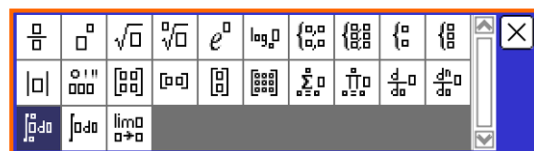
Legg til ei ny side i dokumentet ved å klikke  Sett inn.  Kalkulator. Du kan også opprette et nytt dokument: Klikk  Sett inn  Kalkulator.

Nå klikker/taster du  Integral $0 \leftarrow 6 \leftarrow$. Skriv inn integranden og avslutt med $x \leftarrow$.



Alternativ 3



Du kan også bruke sjablonen for det bestemte integralet som du finner i sjablonoversikten ved å klikke .




Eksempel sidene 158. Areal under x-aksen

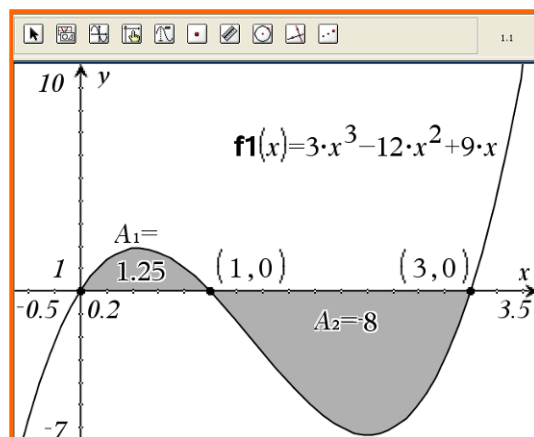
Alternativ 1

Skriv inn funksjonsuttrykket på kommandolinja.

Klikk   Akser innstillings-dialog. I **Vindusparametere** legger du inn XMin = -0.5, XMaks = 3.5, YMin = -7 og YMaks = 10. Bestem skjæringspunktene mellom grafen og x-aksen. Deretter finner du de to integralene, det ene for arealdelen over x-aksen og det andre for delen under x-aksen:

Klikk  Integral, klikk på grafen med markøren og tast $0 \leftarrow 1 \leftarrow$. Nå har du funnet arealet over x-aksen. På samme måte finner du integralet under x-aksen. Arealet avgrenset av grafen og x-aksen er da gitt ved:




$$A = A_1 + |A_2| = 1.25 + |-8| = \underline{\underline{9,25}}$$





S2 og TI-nspire CAS


Alternativ 2

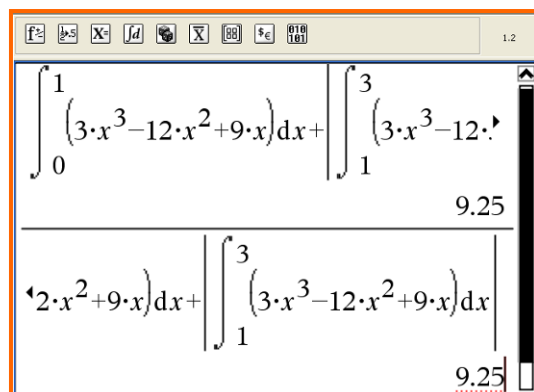
Legg inn ei kalkulatorside i dokumentet.

Deretter klikker/taster du  **Integral 0**  **1** .

Skriv inn integranden og tast  **x**  **abs(**, kopier integralet og lim det inn i abs-parentesen.

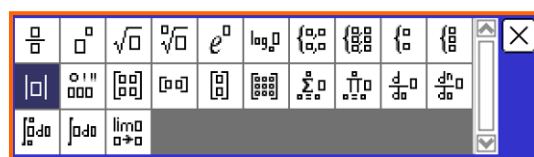
Skriv inn ny nedre og øvre grense for det siste integralet.

Du kan bruke absoluttverdi-sjablonen på det siste integralet. Avslutt med **Ctrl** .



$$\left| \int_0^1 (3 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 9 \cdot x) dx \right| = 9.25$$

$$\left| \int_1^3 (3 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 9 \cdot x) dx \right| = 9.25$$




5: Sannsynlighet

165 – 170 Stokastiske variabler

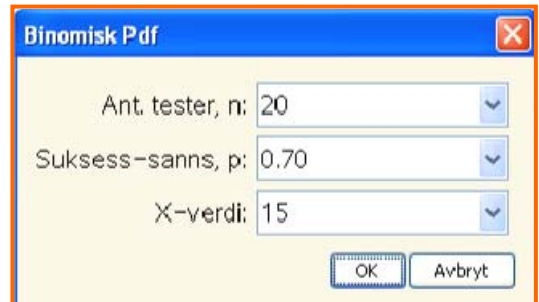
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 2 Spiring av frø

Tast/klikk  **Fordelinger...** ► **Binomisk Pdf**. I dialogboksen skriver du de aktuelle tallene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Sannsynligheten er 17,9 % for at akkurat 15 frø vil spire.



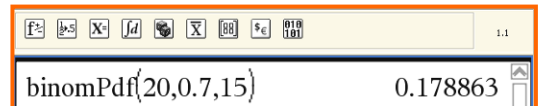
Binomisk Pdf

Ant. tester, n: 20

Suksess-sanns, p: 0.70

X-verdi: 15

OK Avbryt





binomPdf(20,0.7,15) 0.178863

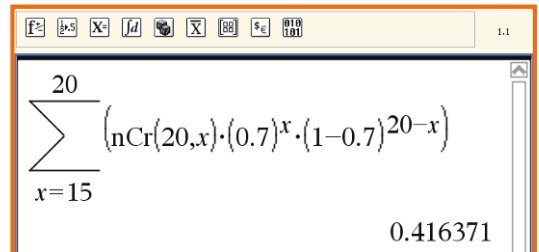
Utvidelse av eksempel 2

Vi finner sannsynligheten for at minst 15 frø vil spire.

Alternativ 1:

Tast  Sum \sum 15 20  Kombinasjoner 20, $X \rightarrow * 0.7^X (1-0.7)^{20-X}$.



Sannsynligheten er 41,6 % for at minst 15 frø vil spire.



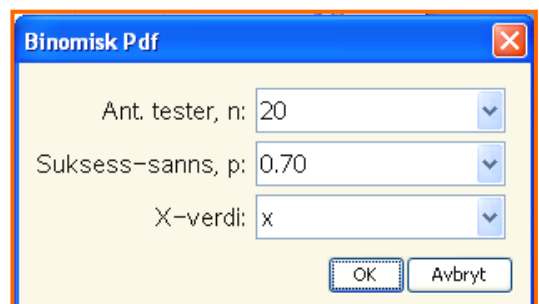
$$\sum_{x=15}^{20} \left(nCr(20,x) \cdot (0.7)^x \cdot (1-0.7)^{20-x} \right)$$

0.416371

Alternativ 2:

Klikk/tast  Sum \sum 15 20  **Fordelinger...** ► **Binomisk Pdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.



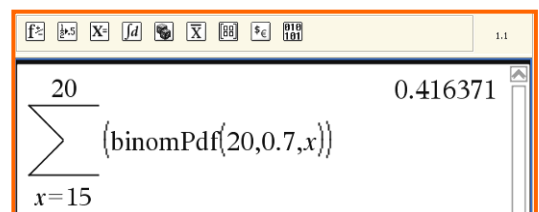
Binomisk Pdf

Ant. tester, n: 20

Suksess-sanns, p: 0.70

X-verdi: x

OK Avbryt



$$\sum_{x=15}^{20} \left(\text{binomPdf}(20,0.7,x) \right)$$

0.416371

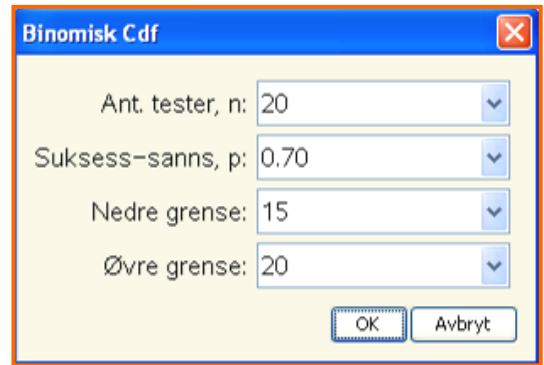
Sannsynligheten er 41,6 % for at minst 15 frø vil spire.

Alternativ 3:

Klikk  **Fordelinger...** ► **Binomisk Cdf**. I dialogboksen setter du inn de aktuelle tallene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Sannsynligheten er 41,6 % for at minst 15 frø vil spire.



Binomisk Cdf

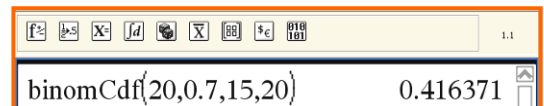
Ant. tester, n: 20

Suksess-sanns, p: 0.70

Nedre grense: 15

Øvre grense: 20

OK Avbryt





binomCdf(20,0.7,15,20) 0.416371

170 – 177 Forventningsverdi

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel side 176 og 177 Spiring av frø

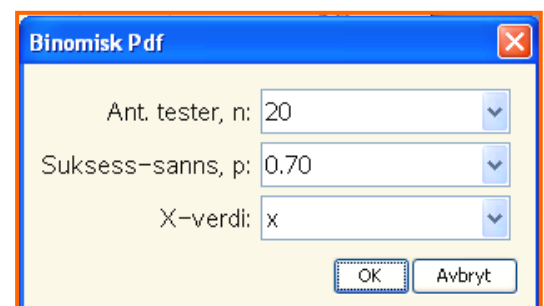
Alternativ 1:

Tast/klikk  **Sum X** \leftarrow 15 \leftarrow 20 \leftarrow X *  **Fordelinger...** ► **Binomisk Pdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Forventningsverdien for den stokastisk variable er 14; altså:

$$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,70 = 14$$



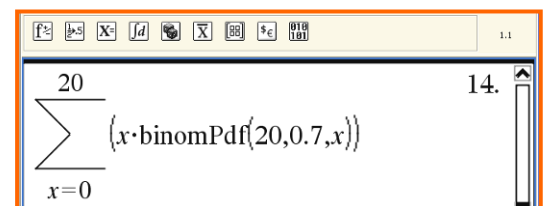
Binomisk Pdf

Ant. tester, n: 20

Suksess-sanns, p: 0.70



X-verdi: x

OK Avbryt



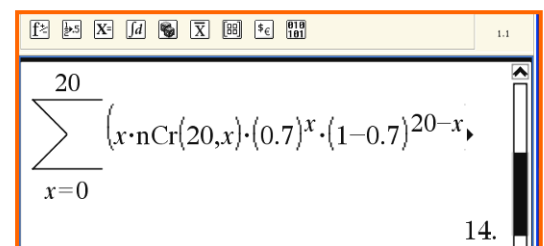
$$\sum_{x=0}^{20} (x \cdot \text{binomPdf}(20, 0.7, x))$$
 14.

Alternativ 2:

Tast/klikk  **Sum X** \leftarrow 15 \leftarrow 20 \leftarrow X *  **Kombinasjoner** 20, X \rightarrow * 0.7^X \leftarrow (1-0.7 \rightarrow ^20-x \leftarrow .

Forventningsverdien for den stokastisk variable er 14; altså:

$$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,70 = 14$$




$$\sum_{x=0}^{20} (x \cdot nCr(20, x) \cdot (0.7)^x \cdot (1-0.7)^{20-x})$$
 14.

178 – 183 Varians og standardavvik

Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel side 183 Spiring av frø

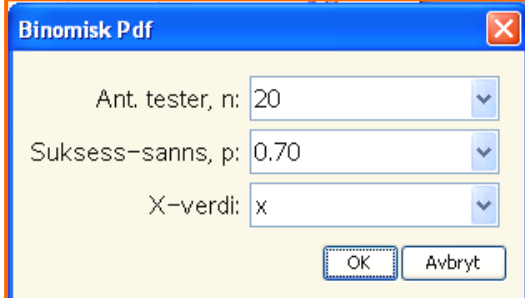
Tast/klikk  Sum $\sum_{x=0}^{20} (x-14)^2 \cdot \text{binomPdf}(20, 0.7, x)$

Fordelinger... ► **Binomisk Pdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Forventningsverdien for den stokastisk variable er 14; altså:

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \cdot 0,70 \cdot 0,30 = 4,20$$



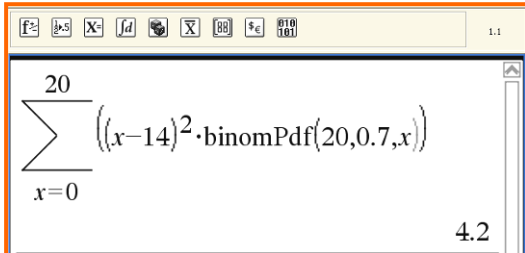
Binomisk Pdf

Ant. tester, n: 20

Suksess-sanns, p: 0.70

X-verdi: x

OK Avbryt








20


$$\sum_{x=0}^{20} ((x-14)^2 \cdot \text{binomPdf}(20, 0.7, x))$$

4.2

184 – 198 Normalfordelingen

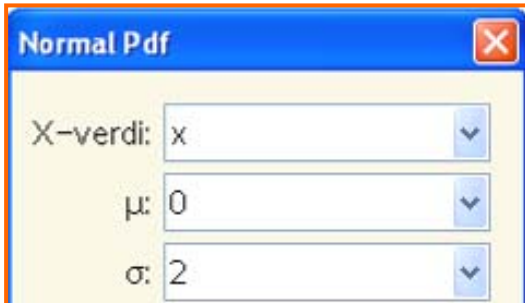
Klikk  Sett inn  Grafer & geometri. Klikk  på den øverste verktøylinja. Bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet** og Grafer & geometriversetøylinja. Klikk  Sett inn  Kalkulator. Nå kan du veksle mellom graf- og kalkulatorapplikasjonen.

NB! – eksempel side 189

I kalkulatorapplikasjonen får du fram normalfordelingsfunksjonen ved å klikke/taste 

Fordelinger... ► **Normal Pdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.



Normal Pdf

X-verdi: x

μ : 0

σ : 2

Merk $\text{normPdf}(x, 0, 2)$, kopier (**Ctrl C**) funksjonen og lim (**Ctrl V**) den inn på kommandolinja i grafapplikasjonen.

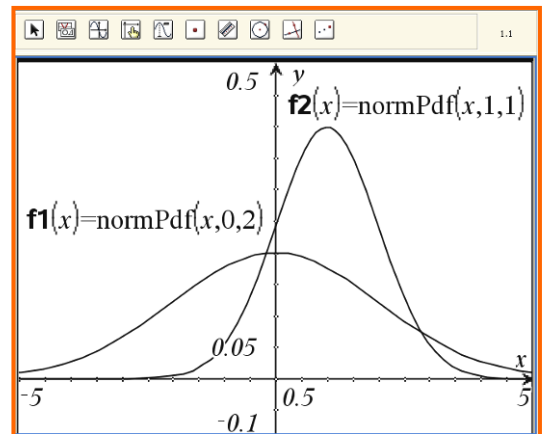


$\text{normPdf}(x, 0, 2)$ $\text{normPdf}(x, 0, 2)$

Kommandolinja kan du skjule eller vise ved å taste **Ctrl G**.

Velg x -verdier mellom -5 og 5 .

Tilpass vinduet (  Zoom - Tilpasning) til grafen.



Eksempel 4 og sidene 196 og 197 Vekt til nyfødt gutt

Punkt 1, alternativ 1:

I kalkulatorapplikasjonen klikker/taster du .

Fordelinger... ► **Normal Cdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Sannsynligheten er 39,3 % for at en nyfødt gutt er mellom 2,5 og 3,5 kg.


Punkt 1, alternativ 2:

I kalkulatorapplikasjonen klikker/taster du .

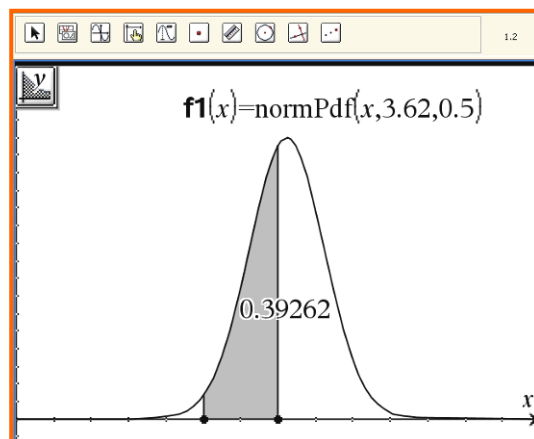
Fordelinger... ► **Normal Pdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene. Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Merk $\text{normPdf}(x, 3.62, 0.5)$, kopier funksjonen og lim den inn på kommandolinja i grafapplikasjonen.


Kommandolinja kan du skjule eller vise ved å taste **Ctrl G**. Velg x -verdier mellom 0 og 7. Tilpass vinduet til grafen.

I grafapplikasjonen taster du  Integral, flytter musemarkøren bort til grafen, klikker eller taster \leftarrow , taster **2.5** \leftarrow **3.5** og avslutter med \leftarrow . Arealet av det skyggelagte området er 0,393.

Sannsynligheten er 39,3 % for at en nyfødt gutt er mellom 2,5 og 3,5 kg.

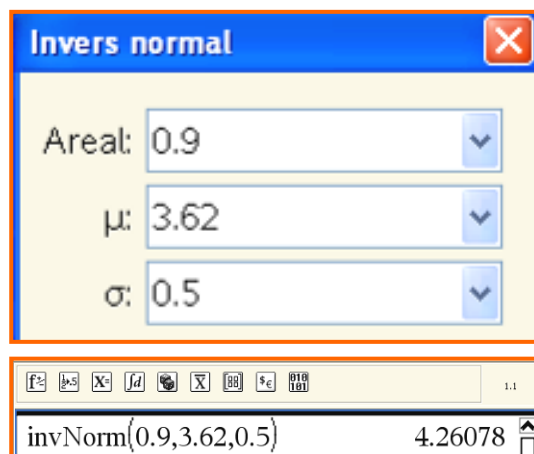


Punkt 2

I kalkulatorapplikasjonen taster du  **Fordelinger...** \rightarrow **Invers normal**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.


Sannsynligheten er 90 % for at en nyfødt gutt vil veie høyst 4,26 kg.



198 – 205 Sentralgrensesetningen

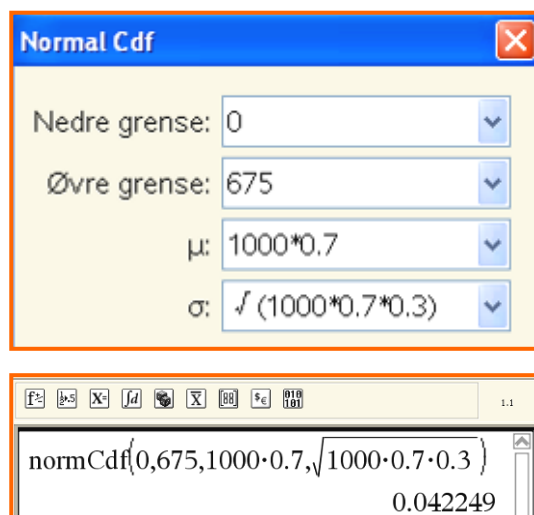
Klikk  Sett inn \sqrt{x} Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempel 3 Spiring av frø

I kalkulatorapplikasjonen taster du  **Fordelinger...** \rightarrow **Normal Cdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Sannsynligheten er 4,2 % for at høyst 675 frø vil spire.

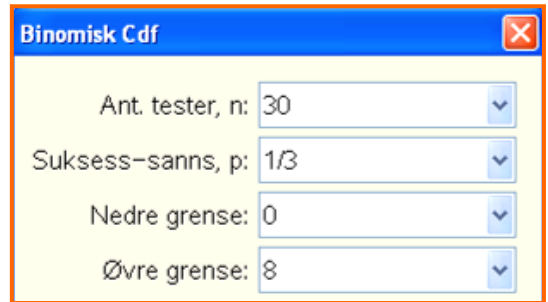


Eksempel 5 Flervalgsprøve

I kalkulatorapplikasjonen klikker du  **Fordelinger...** ► **Binomisk Cdf**.

I dialogboksen setter du inn de aktuelle tallene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.



Binomisk Cdf

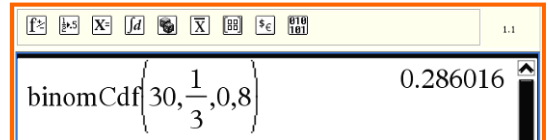
Ant. tester, n: 30

Suksess-sanns, p: 1/3

Nedre grense: 0

Øvre grense: 8

Sannsynligheten er 28,6 % for at hun får høyst 8 riktige svar.



$\text{binomCdf}\left(30, \frac{1}{3}, 0,8\right)$ 0.286016

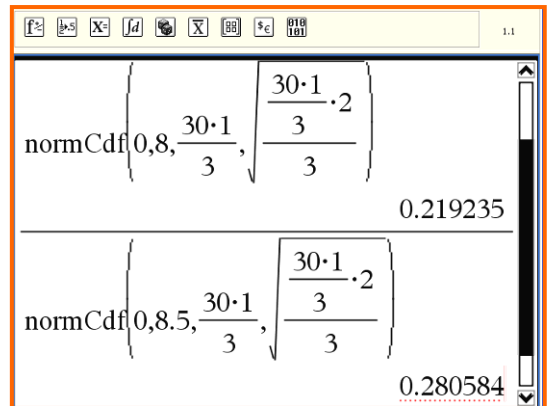
Alternativ:

Antall riktige svar, X , er tilnærmet normalfordelt med forventningsverdien $np = 30 \cdot \frac{1}{3}$ og standardavviket

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}$. I kalkulatorapplikasjonen taster

du  **Fordelinger...** ► **Normal Cdf**. I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene. Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

Sannsynligheten er 21,9 % for at hun får høyst 8 riktige svar. Med "halvkorreksjon" får du 28,1 %. Vi ser at sannsynligheten med halvkorreksjon er nesten lik svaret vi får uten tilnærming.




$\text{normCdf}\left(0,8, \frac{30 \cdot 1}{3}, \sqrt{\frac{30 \cdot 1}{3} \cdot 0,2}\right)$ 0.219235

$\text{normCdf}\left(0,8,5, \frac{30 \cdot 1}{3}, \sqrt{\frac{30 \cdot 1}{3} \cdot 0,2}\right)$ 0.280584

206 – 213 Hypotesetesting

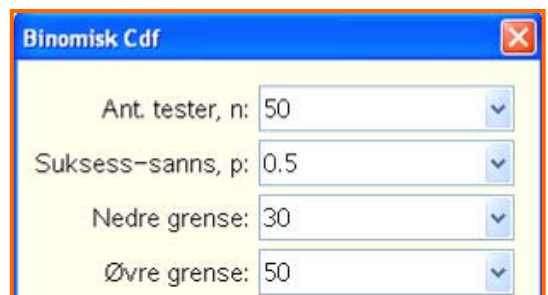
Klikk  Sett inn  Kalkulator. Klikk  på den øverste verktøylinja og bruk **Tastatur** og/eller **PC-tastaturet**.

Eksempelene 1 og 2 Klinisk prøving

I kalkulatorapplikasjonen klikker du  **Fordelinger...** ► **Binomisk Cdf**.

I dialogboksen setter du inn de aktuelle tallene.

Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.



Binomisk Cdf

Ant. tester, n: 50

Suksess-sanns, p: 0.5

Nedre grense: 30


Øvre grense: 50

S2 og TI-nspire CAS

I kalkulatorvinduet leser du nå av P -verdien 0,101, altså 10,1 %.

Tilsvarende beregning gir P -verdien 0,016, altså 1,6 %, dersom den nye salven er best for 33 pasienter. En så liten sannsynlighet kan gi det farmasøytiske firmaet grunn til å forkaste nullhypotesen. Det kan derfor være rimelig sikker på at den nye salven er best.

Eksempel 3 Spireevne

I kalkulatorapplikasjonen taster du  **Fordelinger...** ► **Normal Cdf**.

I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

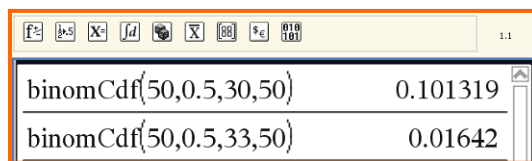
Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

P -verdien er 0,00059, altså 0,059 %.

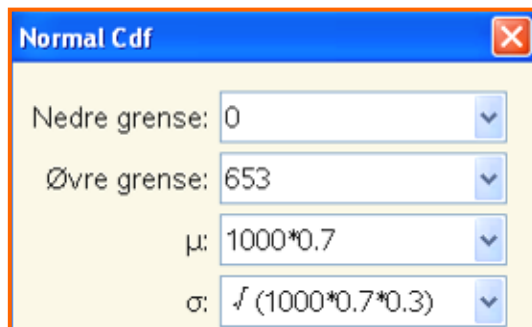
Kalkulatoren kan også beregne P -verdien på grunnlag den binomiske fordelingen. Da får du 0,00076, altså 0,076 %. Forskjellen kommer bl.a. av at det ikke er tatt hensyn til halvkorreksjon (se side 294).

Du ser at P -verdien $0,01 = 1$ % kune bety at 666 frø spirte.

Derfor er det svært usannsynlig at høyst 653 frø vil spire under forutsetning at spireevnen er 70 %.



$\text{binomCdf}\{50,0.5,30,50\}$	0.101319
$\text{binomCdf}\{50,0.5,33,50\}$	0.01642



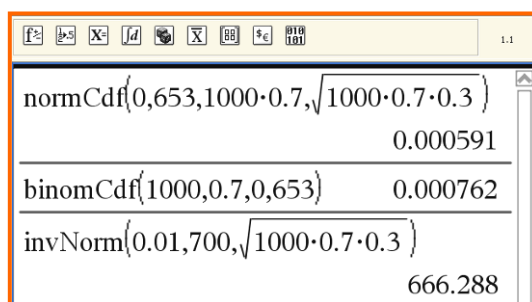
Normal Cdf

Nedre grense: 0

Øvre grense: 653

μ : $1000 \cdot 0.7$


σ : $\sqrt{1000 \cdot 0.7 \cdot 0.3}$



$\text{normCdf}\{0,653,1000 \cdot 0.7, \sqrt{1000 \cdot 0.7 \cdot 0.3}\}$	0.000591
$\text{binomCdf}\{1000,0.7,0,653\}$	0.000762
$\text{invNorm}\{0.01,700,\sqrt{1000 \cdot 0.7 \cdot 0.3}\}$	666.288

Eksempel 4 Leskedrikk

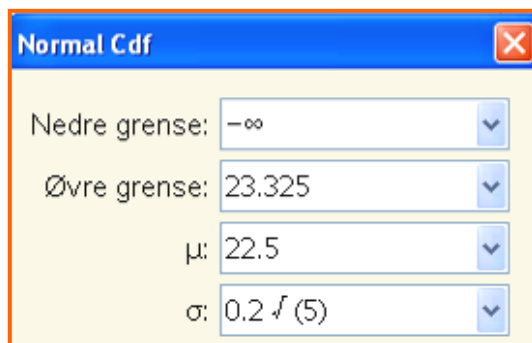
Alternativ 1

I kalkulatorapplikasjonen taster du  **Fordelinger...** ► **Normal Cdf**.

Den forhåndsinnstilte Nedre grense kan du endre til 0. En halvkorreksjon er tatt med i Øvre grense.

I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene. Bekreft valgene med $\leftarrow \leftarrow$.

P -verdien er 3,3 % (3,2 % uten halvkorreksjon). Siden den er mindre enn 5 %, forkaster vi nullhypotesen, og dermed er det et godt grunnlag for å påstå at konsentrasjonen er høyere enn den verdien på 4,5 mg per liter bryggeriet oppgir.



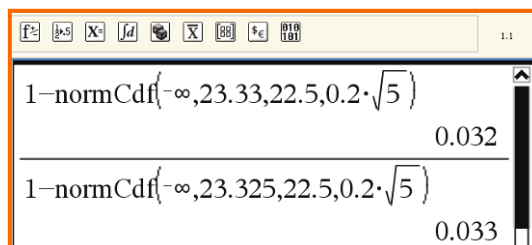
Normal Cdf

Nedre grense: $-\infty$

Øvre grense: 23.325

μ : 22.5

σ : $0.2 \sqrt{5}$



$1 - \text{normCdf}\{-\infty, 23.33, 22.5, 0.2 \cdot \sqrt{5}\}$	0.032
$1 - \text{normCdf}\{-\infty, 23.325, 22.5, 0.2 \cdot \sqrt{5}\}$	0.033

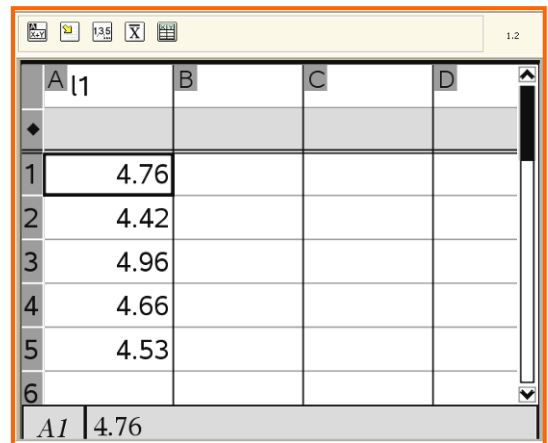
S2 og TI-nspire CAS

Alternativ 2

Opprett ei ny side med applikasjonen Lister & regneark i dokumentet: Klikk  Sett inn  Lister & regneark.

Legg inn resultatet av de fem målingene. Listekolonnen kan du kalle l1.



Deretter går du til kalkulatorapplikasjonen.

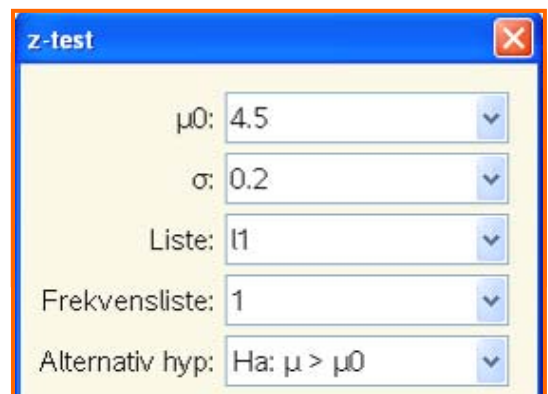


	A l1	B	C	D
1	4.76			
2	4.42			
3	4.96			
4	4.66			
5	4.53			
6				

AI 4.76

I dialogboksen fyller du de aktuelle feltene.

NB! Bruk -tasten når du flytter til neste felt. Bruk  når du vil se alternativene i feltet.



z-test

μ_0 : 4.5

σ : 0.2

Liste: l1

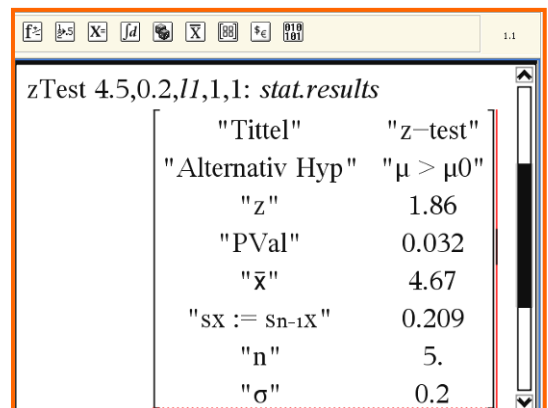
Frekvensliste: 1

Alternativ hyp: $H_a: \mu > \mu_0$

Etter at du bekrefter innlegging av data i dialogboksen **z-test** kommer det fram ei ramme med statistiske opplysninger om de fem målingene.

"PVal" = 0,032 = 3,2 % er her den samme du fikk for P -verdien – uten halvkorreksjon – i Alternativ 1.

Siden P -verdien er mindre enn 5 %, forkaster vi nullhypotesen, og dermed er det et godt grunnlag for å påstå at konsentrasjonen er høyere enn den verdien på 4,5 mg per liter bryggeriet oppgir.



zTest 4.5,0.2,l1,1,1: stat.results

"Tittel"	"z-test"
"Alternativ Hyp"	" $\mu > \mu_0$ "
"z"	1.86
"PVal"	0.032
" \bar{x} "	4.67
"sX := $s_{n-1}X$ "	0.209
"n"	5.
" σ "	0.2